abouzakariya@yahoo.fr

عموميات حول الدوال العددية

السنة الأولى علوم تجريبية و علوم رياضية

ذ : عبدالله بن لختير

■ **تذكير** : **إشارة دالة تآلفية و ثلاثية الحدود و طريقة المميز المختصر**

I- زوجية دالة عددية :

■ **1)- أنشطة :**

■ **تمرين01:**

أدرس زوجية الدالة العددية f في الحالات التالية:

$$(1): f(x)=x^2+\frac{1}{x^3}$$

و $(2): f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$ و $(3): f(x)=x^3-\frac{1}{x^2}$ و $(4): f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$

$(5): f(x)=3.x+|x-2|-|x+2|$ و $(6): f(x)=2.x^2-|x+3|-|x-3|$

$(7): f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-9}}$ و $(8): f(x)=\frac{x^3}{x^2-2.|x|+3}$ و $(9): f(x)=\sqrt{x^2-2.|x|+3}$

■ **تمرين02:**

لتكن f دالة زوجية معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x)=3-2x$ لكل x من $\mathbb{R}^+$ ،

أ- أنشـئ (ζ_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب- أحسب $f(x)$ بدلالة x لكل x من $\mathbb{R}^-$.

■ **تمرين03:**

لتكن g دالة فردية معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث : $g(x)=\begin{cases}-2x\,;-1\le x\le 0\\ x+3; x\le -1\end{cases}$ ،

أ- أنشـئ (ζ_g) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب- أحسب $g(x)$ بدلالة x لكل x من $\mathbb{R}^+$.

■ **2)- ملخص :**

■ **تعريف :** لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f ،

- نقول أن f دالة زوجية إذا كان : لكل x من D_f $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$.

abouzakariya@yahoo.fr

- نقول أن f دالة فردية إذا كان : لكل x من D_f $-x \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$.

■ **ملحوظة :**

- إذا كانت f دالة فردية و كان $0 \in D_f$ فإن : $f(0) = 0$.

■ **خاصية01:** ليكن (ζ_f) منحنى دالة عددية f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ ،

- تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان (ζ_f) متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب (Oy) .

- تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كان (ζ_f) متماثلا بالنسبة للنقطة O أصل المعلم .

II- مقارنة دالتين عدديتين :

■ 1)- الدالة الموجبة و الدالة السالبة :

■ **تقديم :** نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ ،

حدد جذرا بديهيا للحدودية f ثم أنشئ جدولا تحدد فيه إشارة $f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

■ **تعريف :**

- نقول إن دالة عددية f موجبة قطعا على جزء D من D_f و نكتب $f \succ 0$ على D

إذا كان : $f(x) \succ 0$ لكل x من D_f .

- نقول إن دالة عددية f سالبة قطعا على جزء D من D_f و نكتب $f \prec 0$ على D

إذا كان : $f(x) \prec 0$ لكل x من D_f .

■ **خاصية02:** ليكن (ζ_f) منحنى دالة عددية f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ ،

- تكون f موجبة على D_f إذا و فقط إذا كان (ζ_f) فوق محور الأفاصيل (Ox) .

- تكون f سالبة على D_f إذا و فقط إذا كان (ζ_f) تحت محور الأفاصيل (Ox) .

■ **تمرين04:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{-x^2 + x + 6}$ ،

أ- حدد D_f ثم أنشيء جدولا تحدد فيه إشارة $f(x)$ لكل x من D_f .

ب- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $(I): \dfrac{4x^2 - 12x + 5}{-2x^2 + x + 3} \leq 0$.

■ 2)- مقارنة دالتين :

■ **تعريف :** لتكن f و g دالتين عدديتين مجموعة تعريفهما D_f و D_g على التوالي

abouzakariya@yahoo.fr

و $D \subseteq D_f \cap D_g$ ،

- نقول إن f أصغر من أو تساوي g على D و نكتب $f \leq g$ على D إذا كان :
$(f - g) \leq 0$ على D .

- نقول إن f أصغر قطعا من g على D و نكتب $f \prec g$ على D إذا كان :
$(f - g) \leq 0$ على D .

■ **مثال :** قارن الدالتين العدديتين f و g في الحالات التالية :

$$(1):\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ g(x) = -x^2 + x - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (2):\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \\ g(x) = x + 1 \end{cases}$$

■ **تمرين05:**

نعتبر العددين الحقيقيين : $A = \dfrac{1,0000004}{(1,0000006)^2}$ و $B = \dfrac{(0,9999995)^2}{0,9999998}$ ،

والدالتين العدديتين : $f : x \mapsto \dfrac{1+4.x}{(1+6.x)^2}$ و $g : x \mapsto \dfrac{(1-5.x)^2}{1-2.x}$.

أ- حدد $D = D_f \cap D_g$ ، ثم قارن على D الدالتين العدديتين f و g .

ب- أحسب $f\left(10^{-7}\right)$ و $g\left(10^{-7}\right)$ ، ثم قارن العددين A و B .

■ **خاصية03:** f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجموعة D و (ζ_f) و (ζ_g)
منحناهما على التوالي في معلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ،

- تكون f أصغر من أو تساوي g على D إذا و فقط إذا كان (ζ_f) تحت (ζ_g) .

■ **تمرين06:**

حدد وضع منحنى الدالة $f : x \to \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ بالنسبة للمستقيم $(D) : y = \dfrac{x}{2}$.

■ 3)- الدالة المكبورة والدالة المصغورة :

■ **تقديم :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{3}x}{x^2 + 1}$ ،

abouzakariya@yahoo.fr

أ- بين أن $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- أول هندسيا النتيجة السابقة .

■ **تعريف :** لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f ، و M و m عددين حقيقيين .

- نقول إن الدالة f مكبورة بالعدد M إذا كان $f(x) \leq M$ لكل x من D_f .

- و نقول إن الدالة f مصغورة بالعدد m إذا كان $f(x) \geq m$ لكل x من D_f .

- نقول إن f دالة محدودة إذا كانت مكبورة و مصغورة .

■ **ملحوظة :**

الدوال الموجبة مصغورة بالعدد 0 و الدوال السالبة مكبورة بالعدد 0 .

■ **خاصية04:**

تكون دالة عددية f محدودة إذا و فقط إذا وجد α من $]0,+\infty[$ بحيث :

$|f(x)| \leq \alpha$ لكل x من D_f .

■ **خاصية05:** ليكن (ζ_f) منحنى دالة عددية f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ ،

- تكون الدالة f مكبورة بالعدد M إذا و فقط إذا كان (ζ_f) تحت المستقيم $(D): y = M$.

- تكون الدالة f مصغورة بالعدد m إذا و فقط إذا كان (ζ_f) فوق المستقيم $(D'): y = m$.

■ **تمرين07:** نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ و $g(x) = \frac{x^2-4x}{x^2+4}$.

أ- بين أن $|f(x)| \leq \frac{1}{4}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

ب- بين أن g دالة محدودة و استنتج أن منحناها محصور بين مستقيمين موازيين لمحور الأفاصيل .

III- مطارف دالة عددية :

■ **1)- أنشطة :**

■ **تمرين08:** بين أن الدالة : $f: x \rightarrow -x^2+x+6$ تقبل قيمة قصوى مطلقة يتم تحديدها و الدالة : $g: x \rightarrow 4x^2-12x+5$ تقبل قيمة دنيا مطلقة .

■ **تمرين09:** لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}1-x\,;x\le -1\\ x+3;-1\le x\le 2\\ 2x+9;x\ge 2\end{cases}$$

أنشيء (ζ_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، ثم حدد مطارف f و طبيعتها .

■ **2)- ملخص :**

■ **تعريف :** لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و x_0 عنصر من D_f .

- نقول إن f تقبل عند x_0 أقصى نسبي إذا وجد مجال مفتوح I بحيث $x_0\in I$

و $f(x)\le f(x_0)$ لكل x من I .

- نقول إن f تقبل عند x_0 أدنى نسبي إذا وجد مجال مفتوح I بحيث $x_0\in I$

و $f(x)\ge f(x_0)$ لكل x من I .

IV- رتابة دالة عددية :

■ **1)- أنشطة :**

■ **تمرين10:** نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2-3|x|$.

أ- أحسب معدل تغير f على $\mathbb{R}^+$ ثم أدرس رتابها على هذا المجال .

ب- إستنتج رتابة f على $\mathbb{R}^-$ ثم اعط جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

ج- حدد مطارف الدالة f و طبيعتها .

■ **تمرين11:** نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=x(3-|x|)$.

أ- بين أن g دالة فردية ثم أدرس رتابتها على $\mathbb{R}^+$.

ب- إستنتج رتابة g على $\mathbb{R}^-$ ثم اعط جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

ج- حدد مطارف الدالة g و طبيعتها .

■ **2)- ملخص :**

■ **الرتابة و معدل التغير :**

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و I مجال ضمن D_f ،

- تكون الدالة f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان :

$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\succ 0$ لكل x و y من I بحيث $x\neq y$.

- تكون الدالة f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان :

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\prec 0$ لكل x و y من I بحيث $x\neq y$.

■ **أمثلة :** - **رتابة** ax^2+bx+c **حيث** $a\in\mathbb{R}^*$:

- **رتابة** $\frac{ax+b}{cx+d}$ **حيث** $c\in\mathbb{R}^*$:

V- دراسة دوال إعتيادية :

■ **1)- دراسة حدوديات من الدرجة الثانية و دوال متخاطة :**

■ **تمرين12:**

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي :

$f(x)=-x^2-2x+3$ و $g(x)=\frac{-x+1}{x+1}$.

أ- حدد أفاصيل نقط تقاطع (ζ_f) و (ζ_g) .

ب- أرسم (ζ_f) و (ζ_g) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ج- حل مبيانيا في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة $(I):\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x+1}\geq 0$.

■ **3)- دراسة دوال من نوع** $f:x\to ax^3$ **حيث** $a\in\mathbb{R}^*$:

■ **4)- دراسة دوال من نوع** $f:x\to\sqrt{x-a}$ **حيث** $a\in\mathbb{R}$:

■ **5)- صورة مجال بدالة عددية :**

■ **تعريف :** لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و I مجال ضمن D_f ،

نسمي صورة المجال I بالدالة f المجموعة $\{f(x)/x\in I\}$ و يرمز لها بالرمز $f(I)$

إذن $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$.

■ **أمثلة :** لنحدد صور المجالات $I=[1,3]$ و $J=[-1,1]$ و $K=[0,2]$ بالدالة العددية

f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-2x$.

■ **تمرين13:** حدد صور المجالات $I=[-4,-3[$ و $J=]0,4]$ و $K=\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[$ بالدالة

العددية g المعرفة بما يلي : $g(x)=\frac{x}{x+2}$.

VI- رتابة مركب دالتين عدديتين :

■ **1)- مركب دالتين عدديتين :**

■ **تعريف :** لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجالين I و J على التوالي

بحيث $f(I)\subseteq J$ ،

مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب هي الدالة h المعرفة على I بما يلي :

$h(x)=g(f(x))$ لكل x من I ، يرمز للدالة h بالرمز $g\circ f$

إذن : $g\circ f : \left| \begin{array}{l} I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x \to f(x) \to g(f(x)) \end{array} \right.$.

■ **مثال :** نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=x^2+2x$ و $g(x)=x^2-2x$.

حدد $g\circ f$ و $f\circ g$ ثم قارنهما و حدد أيضا $f\circ f$ و $g\circ g$.

■ **ملحوظة :** بصفة عامة $g\circ f \neq f\circ g$ هذا يعني أن تركيب الدوال عملية غير تبادلية .

- **بصفة عامة :** إذا كانت f و g دالتين عدديتين مجموعة تعريفهما على التوالي D_f و D_g

فإن : $D_{g\circ f}=\{x\in D_f / f(x)\in D_g\}$

و لدينا : $g\circ f : \left| \begin{array}{l} D_{g\circ f} \xrightarrow{f} D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x \to f(x) \to g(f(x)) \end{array} \right.$.

■ **مثال :** نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي :

$f(x)=x^2+x$ و $g(x)=\sqrt{x-6}$

حدد $D_{g\circ f}$ و $D_{f\circ g}$ ثم أوجد صيغتي $g\circ f$ و $f\circ g$.

■ **2)- رتابة مركب دالتين :**

■ **خاصية06:** لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجالين I و J على التوالي

بحيث $f(I)\subseteq J$ ،

- إذا كانت للدالتين f و g نفس الرتابة على المجالين I و J على التوالي فإن

الدالة $g\circ f$ تكون تزايدية على I .

- إذا كانت للدالتين f و g رتابة مختلفة على المجالين I و J على التوالي فإن

الدالة $g\circ f$ تكون تناقصية على I .

■ **تمرين14:** نعتبر الدالتين f و h بحيث $f(x)=\frac{1}{x}$ و $h(x)=\frac{4x-1}{x^2}$.

أ- حدد حدودية g من الدرجة الثانية تحقق : $g\circ f = h$. **ب-** إستنتج رتابة الدالة h على المجالات $]-\infty,0[$ و $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ و $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ ثم اعط جدول تغيراتها .
N.B : toutes vos remarques sont les biens venus,contactez moi abouzakariya@yahoo.fr