

**Exercice 1**

1/6

Déterminer les abscisses curvilignes principales des points  $A_1, A_2, A_3$  dont l'une des abscisses est respectivement :  $\frac{37\pi}{3}, \frac{157\pi}{4}, -\frac{1115\pi}{6}$  puis représenter ces points sur le cercle trigonométrique.

**Exercice 2**

Représenter sur le cercle trigonométrique les points dont les abscisses curvilignes sont les nombres de la forme  $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}$  Avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 3**

Soit (ABC) un triangle équilatère tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ . Calculer :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}).$$

**Exercice 4**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls tel que :  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{7} [2\pi]$  Calculer :

$$(\vec{u}, -\vec{v}), (\vec{v}, 2\vec{u}), (\vec{v}, -3\vec{u}), (-\vec{u}, -\vec{v})$$

**Exercice 5**

Soit (ABCD) un parallélogramme, M un point du segment  $[AB]$  tel que  $(DM)$  est bissectrice de l'angle  $(\widehat{DC}, \widehat{DA})$  et, N un point du segment  $[AB]$  tel que  $(CN)$  est bissectrice de l'angle  $(\widehat{CB}, \widehat{CN})$   
Démontrer que  $(CN)$  et  $(DM)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 6**

Soit A et B deux points du cercle trigonométrique tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Déterminer le point M du cercle trigonométrique vérifiant  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \equiv 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ .

**Exercice 7**

Calculer  $\cos(\frac{7\pi}{6}), \sin(\frac{176\pi}{3}), \cos(-\frac{139\pi}{6}), \tan(\frac{173\pi}{4})$

**Exercice 8**

Soit U le cercle trigonométrique lié au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D dont les abscisses curvilignes sont respectivement

$$\frac{37\pi}{2}, \frac{117\pi}{6}, \frac{-151\pi}{3}, \frac{11983\pi}{4}$$

**Exercice 9**

Soit x un nombre réel. simplifier les expressions:

$$A = \sin(x + \pi) + \cos(x - \pi) - \sin(x - 7\pi) + \cos(x - 121\pi)$$

$$B = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{117\pi}{2} - x) - \cos(x - \frac{119\pi}{2})$$

**Exercice 10**

Soit A, B, C trois points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes  $\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{3}, \alpha + \frac{4\pi}{3}$  respectivement. avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 1) montrer que (ABC) est un triangle équilatère .  
 2) en déduire que :

$$\cos(\alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin(\alpha) + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

### Exercice 11

Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

- 1)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
- 2)  $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$
- 3)  $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = -1$
- 4)  $\sin^3 x + \cos^3 x - \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$

### Exercice 12

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- 1)  $2\cos x + \sqrt{3} = 0$       2)  $2\cos x - 1 = 0$     3)  $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$       4)  $\sin x - \cos x = 0$
- 5)  $\tan x - 1 = 0$       6)  $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$
- 7)  $\tan(3x) - \tan(x) = 0$     8)  $\tan(3x) + \tan\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

- 1)  $\tan(x) \cdot \tan(4x) = -1$     2)  $\cos(2x) + \cos(3x) = 2$     3)  $\cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$

2) Résoudre dans  $[0, 2\pi]$  les équations suivantes :

- 1)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$     2)  $\sqrt{3}\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - 1 = 0$
- 3)  $-2\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

### Exercice 13

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

- 1)  $2\cos(x) - 1 \geq 0$     2)  $2\cos(x) - 1 < 0$
- 3)  $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$     4)  $2\sin x + 1 < 0$     5)  $\sqrt{2}\cos(2x) + 1 < 0$     6)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$
- 7)  $\tan(x) - 1 > 0$     8)  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \leq 0$

2) Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  les inéquations suivantes :

- 1)  $2\cos 3x + 1 > 0$     2)  $\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < 1$
- 3)  $2\cos^2 x > 1$     4)  $2\sqrt{2}\sin^2(x) + (\sqrt{2} - 2)\sin x - 1 \geq 0$

### Exercice 14

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2\sin x = \cos y \\ \sin^2 x + \sin^2 y + \cos y + \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$$

### Exercice 15

On considère la fonction  $f(x) = \sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  et montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x + \pi) = f(x)$
- 2) Montrer que  $(f(x))^2 = 2(1 + |\sin x|)$  et en déduire que ;  $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$
- 3) Montrer que  $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sqrt{1 + |\cos x|}$  puis résoudre dans  $[0, \pi]$  l'équation  $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$  .

**Exercice 16**

Soient  $a, b, c$  les longueurs des trois cotés d'un triangle .

Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}) a^2 < \frac{b^2}{\cos^2 x} + \frac{c^2}{\sin^2 x}$

**Exercice 17**

Soient  $a, b$  et  $c$  les mesures des trois angles d'un triangle . montrer ce qui suit :

- 1)  $\sin b \cdot \cos c + \sin c \cdot \cos b = \sin a$
- 2)  $a = b \cos c + c \cos b$
- 3)  $\tan b + \tan c = \frac{\sin a}{\cos b \cos c}$

**Exercice 18**

- 1) Montrer que si  $|a| \leq 1$  et  $|b| \leq 1$  alors :  $ab = 1 \Leftrightarrow (a = 1 \text{ et } b = 1) \text{ ou } (a = -1 \text{ et } b = -1)$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin(4x) \cdot \sin(6x) = 1$

**Exercice 19**

Soit  $a \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$  tel que :  $\sin(a) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

- 1) a) Montrer que :  $\cos(2a) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$  et en déduire  $\cos(4a)$  .  
 b) Montrer que  $a$  est solution de l'équation :  $\cos(4x) = \sin(x)$
- 2) Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'équation  $\cos(4x) = \sin(x)$  et en déduire la valeur de  $a$  .

**Exercice 20**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cos^3(3^k x)$

- 1) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $\cos^3(x) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$  .
- 2) Montrer que .  $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : S_n(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \cos(3^{n+1}x)$

**Exercice 21**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2k\pi}{k} / k \in \mathbb{Z} \right\}$  on pose

$$S = \cos x + \cos 2x + \dots \dots \cos nx$$

Démontrer que :  $S \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{nx}{2} \cos \left( (n+1) \frac{x}{2} \right)$

**Exercice 22**

a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\cos 3x = \cos 4x$ .

b. Démontrer que :  $\begin{cases} \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \end{cases}$ , pour  $x$  réel quelconque.

c. En déduire que les solutions de l'équation  $8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1 = 0$  sont :

$$1, \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}.$$

d. Factoriser  $8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1$  et en déduire que :

$$\cos \frac{2\pi}{7} \times \cos \frac{4\pi}{7} \times \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

**Exercice 23**

a. Résoudre dans l'équation :  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$ .

Préciser les solutions appartenant à  $] -\pi, +\pi[$  et les représenter sur un cercle trigonométrique.

b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{2} \sin^2 x + 3 \cos x - 2\sqrt{2} = 0$ , puis représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

c. Soit  $\alpha$  la solution commune aux a) et b) et appartenant à  $] -\pi, +\pi]$ . Exprimer  $\cos \alpha$  en fonction de  $\cos \frac{\alpha}{2}$  et de  $\sin \frac{\alpha}{2}$ .

En déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{8}$  et de  $\sin \frac{\pi}{8}$ .

d. Procéder comme au c) pour obtenir la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{16}$  et  $\sin \frac{\pi}{16}$ . Peut-on faire une conjecture sur l'expression de  $\cos \frac{\pi}{2^n}$  et  $\sin \frac{\pi}{2^n}$  pour  $n \geq 2$  et si oui laquelle ?

**Exercice 24**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

1.  $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \cos x$

2.  $\sin 2x + \cos 2x = -1$

3.  $\tan x = \sin 2x$

4.  $\sin^3 x + \sin 3x = 0$

5.  $\sin^2 x + \frac{5}{2} \cos x = 2$

**Exercice 25**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $(\sqrt{3} - 1) \sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cos x \sin x + 1 = 0$ .

2.  $\tan x + 2 \cos x - 2 \sin x = 1$

**Exercice 26**

Résoudre l'équation suivante et représenter sur le cercle trigonométrique.

$$2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$$

et représenter sur le cercle trigonométrique.

**Exercice 27**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $1 + \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x - \cos 2x + \cos 3x$

2)  $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

3)  $\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$

4)  $\tan x = \frac{\tan 2x + 1}{\tan 2x - 1}$

5)  $\sin a + \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \sin(a+3x) = 0$  avec  $\sin a \neq 0$

6)  $\tan(a+x) \tan(a-x) = \frac{1 - 2 \cos(2a)}{1 + 2 \cos(2a)}$

7)  $\sin(5x) + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$

**Exercice 28**

1) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}): \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5 + 3 \cos(4x)}{8}$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\cos^6 x + \sin^6 x > \frac{13}{16}$

**Exercice 29**

On considère la fonction  $g(x) = 4 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x \sin x + 3 \sin^2 x - 4$

1) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = 2 \sin x \cos(x + \frac{\pi}{6})$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $g(x) = 0$  et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $g(x) \leq 0$ .

4) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$

b) Calculer  $g(\frac{\pi}{12})$  et en déduire les valeurs de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

**Exercice 30**

1) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $\sin 3x = (1 + 2 \cos 2x) \sin x$

2) Soit  $\alpha \neq k\pi$  montrer que  $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha = \frac{\sin 6\alpha}{2 \sin \alpha}$ .

3) En déduire  $S = \cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \frac{5\pi}{14}$ .

**Exercice 31**

1) Montrer que :  $\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{3\pi}{9})$ .

2) Montrer que :  $\cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} - \cos \frac{3\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

3) En déduire que  $\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{3\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{3}{16}$

4) Montrer que  $P = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{16}$ .

**Exercice 32**

On considère les nombres :  $A = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$  et  $B = \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7}$

et  $C = \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7}$

1) Montrer que  $A = 4B - 1$  2) Montrer que  $C = A$ .

3) calculer  $B \cdot \sin \frac{2\pi}{7}$  et en déduire les valeurs de  $A$  et  $B$  et  $C$

4) En déduire que :  $\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$ .

**Exercice 33**

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  Montrer ce qui suit ;

1)  $\sin a - \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$  avec  $a + b + c = \pi$ .

2)  $\sin(a+c) \sin(a+d) = \sin(b+c) \sin(b+d)$  avec  $\sin(a+b+c+d) = 0$

3)  $4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2} = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c+d)$

4) (ABC) est un triangle rectangle en A si et seulement si  $\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$

**Exercice 34**

1) Montrer que :  $P = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{16}$

2) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $P_n = \cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{3\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$

( Pour cela on pose  $Q_n = \sin \frac{\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1}$  et on calcule  $P_n \cdot Q_n$  .

<http://sefroumaths.site.voila.fr/>