تمرين1

أكتب باستعمال المكممات العبارات التالية وادرس قيمة حقيقتها

(P) لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي m بحيث n=2m

(Q) لكل عددين حقيقيين x و y يوجد عدد صحيح طبيعي حيث x+y=n

(R) يوجد عدد حقيقي M حيث لكل x من IR : $x \le M$.

(S) لكل عدد حقيقي m يوجد عدد حقيقي x بحيث $x^2 - mx + 1 = 0$.

تمرين2

أكتب نفي العبارات التالية وحدد قيمة حقيقتها :

(P) $(\forall x \in IR) : \sqrt{1+x^2} - |x| \ge 0$ (Q) $(\exists n \in IN^*)(\forall x \in IR) : \dfrac{x^{2n}}{1+x} > 1$

(R) $(\forall x \in IR)(\exists y \in IR) : y < x$ (S) $(\forall x \in IR) : x^2 - |x| + 1 \ge 0 \, et \, -1 \le x \le 1$

(T) $(\forall x \ge 1) : x^2 + x - 2 \ge 0$ (U) $(\forall x \in IR)(\exists y \in IR) : x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$

تمرين3

بين أن العبارة التالية صحيحة : $(\forall x > 1)(\forall y > 1)\ x \ne y \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2} \ne \dfrac{y}{1+y^2}$

تمرين4

1) بين أن لكل n من Z :

(a n^2 فردي $\Leftrightarrow$ n فردي (b n^2 زوجي $\Leftrightarrow$ n زوجي

2) استنتج أن $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ ثم أن $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

تمرين5

ليكن a و b من IR^+ بين أن : $\sqrt{1+a} - \sqrt{a} < \sqrt{1+b} - \sqrt{b} \Leftrightarrow b < a$

تمرين6

1) ليكن $a \in IR^+$ بحيث $(\forall \varepsilon > 0) : a < \varepsilon$ بين أن $a = 0$

2) ليكن a و b من IR بحيث $|a-b| < \varepsilon$: $(\forall \varepsilon > 0)$ بين أن $a = b$.

تمرين7

ليكن a و b عنصرين من IR بحيث : $(\forall x \in IR)(a < x \Rightarrow b < x)$ بين أن $b \le a$.

تمرين8

ليكن x و y و z من IR بحيث أحدها موجب قطعا وأحدها سالب قطعا والثالث منعدم وتحقق ما يلي :

$x = 0 \Rightarrow y > 0$ و $x > 0 \Rightarrow y < 0$ و $y \ne 0 \Rightarrow z > 0$

حدد من بين هذه الأعداد الموجب والسالب والمنعدم .

تمرين9

ليكن x و y و z من IR_+^* بحيث $xyz > 1$ و $x + y + z < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

باستعمال البرهان بالخلف بين أن :

1) كل من الأعداد x و y و z يخالف 1 . 2) أحد الأعداد x و y و z أصغر قطعا من 1 .

تمرين10

باستعمال الاستدلال بفصل الحالات بين ما يلي :

1) $(\forall n\in IN) : \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}\in IN$ 2) $(\forall n\in IN) : \dfrac{n^2+1}{3}\notin IN$

تمرين11

ليكن a و b من IR بحيث : $(\forall n\in IN^*): a-\dfrac{1}{n}\le b\le a+\dfrac{1}{n}$

ماذا يمكن أن نقول على a و b ؟

تمرين12

ليكن n و p من IN^* بحيث $p>1$.

بين باستعمال الخلف أنه إذا كان p يقسم n فإن p لايقسم $n+1$

تمرين13

بين باستعمال الإستدلال بالترجع على ما يلي :

1) $(\forall n\in IN^*): 1+q+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ حيث $q\in IR-\{1\}$

2) $(\forall n\in IN^*): 1+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) لكل n من IN : n^3-n يقبل القسمة على3 .

4) لكل n من IN : $3^{2n}-2^n$ يقبل القسمة على 7 .

5) لكل n من IN^* : $3^{2n}+2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11 .

6) $(\forall n\in IN)\ (1+q)^n\ge 1+nq$ حيث q>0 .

6) $(\forall n\in IN^*)\quad : \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2(2n^2-1)$

7) $(\forall n\in IN^*):\ \sum_{k=1}^{n}kk!=(n+1)!-1$ حيث $k!=1.2.3.........k$

8) $(\forall n\in IN^*):\ \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

9) $(\forall n\in IN^*):\ 1+2^3+3^3+.........+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$

10) $(\forall n\in IN^*):\ \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

11) $(\forall n\in IN^*)$
$1-2^2+3^2-..........+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}(1+2\cdots+n)$

12) $(\forall n\ge 2):\quad n!\le\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$

13) $(\forall n\in IN^*):\dfrac{1}{1.2.3......n}\le\dfrac{1}{2^{n-1}}$

تمرين14

بين أنه يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث $(\forall n\ge n_0):\quad 2^n\ge(n+2)^2$

تمرين15

لكل n من IN نعتبر الأعداد a_0 ، a_1 ، a_2 ، .... a_n بحيث يكون لها نفس الإشارة وكلها أكبر قطعا من -1

بين أن : $(1+a_0)\ldots\ldots(1+a_n)>1+a_0+\cdots\cdots a_n$

تمرين16

ليكن n من IN . بين أن $(\forall k\ge 1)\ : n^k+kn^{k-1}\le(n+1)^k$

تمرين17

ليكن a و b عددين حقيقين موجبين قطعا ومختلفين .

بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$

تمرين18 نعتبر الأعداد u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .... بحيث

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

1) بين أن $(\forall n \in IN) : u_n < 2$

2) بين $(\forall n \in IN) : u_n < u_{n+1}$