Exercice 1 Ecrire en utilisant les contificateurs logiques les propositions suivante et étudier leur valeur de vérité

(P) : Pour tout entier naturel n il existe un entier naturel m tel que : $n = 2m$.

(Q) : Pour tous réels x *et* y il existe un entier naturel n tel que : $x + y = n$.

(R) : il existe un nombre réel M tel que pour tout réel x : $x \leq M$.

(Q) : Pour tous réels m il existe un nombre réel x tel que : $x^2 - mx + 1 = 0$

Exercice 2

Ecrire la négation des propositions suivante puis étudier la valeur de vérité de chacune d'elle :

(P) $(\forall x \in IR): \sqrt{1+x^2} - |x| \geq 0$ (Q) $(\exists n \in IN^*)(\forall x \in IR): \frac{x^{2n}}{1+x} > 1$

Erreur ! Signet non défini. (S) $(\forall x \in IR): x^2 - |x| + 1 \geq 0 et -1 \leq x \leq 1$

(T) $(\forall x \geq 1): x^2 + x - 2 \geq 0$ (U) $(\forall x \in IR)(\exists y \in IR): x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$

Exercice 3

Montrer que la proposition suivante est vraie .

$$(\forall x > 1)(\forall y > 1) \;:\; x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$$

Exercice 4

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

a) $(n^2 \; paire) \Leftrightarrow (n \; paire)$ b) $(n^2 \; impaire) \Leftrightarrow (n \; impaire)$

2) en déduire que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 5

Soit $a , b \in IR^+$. Montrer que : $\sqrt{1+a} - \sqrt{a} < \sqrt{1+b} - \sqrt{b} \Leftrightarrow b < a$

Exercice 6

1) Soit $a \in IR^+$ tel que $(\forall \varepsilon > 0)$: $a < \varepsilon$. Montrer que $a = 0$.

2) Soient a et b deux réels tels que $(\forall \varepsilon > 0)$: $|a-b| < \varepsilon$. Montrer que $a = b$.

Exercice 7

Soient a et b deux éléments de IR tels que : $(\forall x \in IR)(a < x \Rightarrow b < x)$

Montrer que $b \leq a$.

Exercice 8

Soient x , y et z trois éléments de IR tels que : L'un d'eux est strictement positif le deuxième est strictement négatif le troisième et nul , et vérifient les propositions suivantes :

$x = 0 \Rightarrow y > 0$, $x > 0 \Rightarrow y < 0$, $y \neq 0 \Rightarrow z > 0$

Déterminer le signe de chacun de ces réels .

Exercice 9

Soient x , y et z trois éléments de IR^{*+} tel que : $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

En utilisant le raisonnement par absurde montrer que :

1) chacun des trois nombres x , y , z est différent de 1 .

2) l'un des trois nombres x , y et z est strictement inférieur à 1 .

Exercice 10

Montrer en utilisant le raisonnement par disjonction des cas ce qui suit :

1) $(\forall n \in IN) : \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \in IN$ 2) $(\forall n \in IN) : \frac{n^2+1}{3} \notin IN$

Exercice 11

Que peut-on dire des nombres réels a et b si : $(\forall n \in IN^*) : a - \frac{1}{n} \leq b \leq a + \frac{1}{n}$

Exercice 12

Soient $(n, p) \in IN^{*2}$ tels que : $p > 1$

Montrer en utilisant le raisonnement par absurde que : Si p divise n alors p ne divise pas n+1

Exercice 13

Montrer en utilisant le raisonnement par récurrence ce qui suit :

1) $(\forall n \in IN^*) 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ où $q \in IR - \{1\}$

2) $(\forall n \in IN^*) 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) Pour tout $n \in IN$ $n^3 - n$ est divisible par 3 .

4) Pour tout $n \in IN$ $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 .

5) Pour tout $n \in IN^*$ $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11 .

6) $(\forall n \in IN)\ (1+q)^n \geq 1 + nq$ ou $q > 0$

7) $(\forall n \in IN^*)$: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

8) $(\forall n \in IN^*)$: $\sum_{k=1}^{n} k k! = (n+1)! - 1$ avec $k! = 1.2.3.........k$

9) $(\forall n \in IN^*)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

10) $(\forall n \in IN^*)$: $1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

11) $(\forall n \in IN^*)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

12) $(\forall n \in IN^*)$: $1 - 2^2 + 3^2 - .... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}(1 + 2 \cdots + n)$

13) $(\forall n \geq 2)$: $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$

14) $(\forall n \in IN^*)$: $\frac{1}{1.2.3......n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Exercice 14

Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que : $(\forall n \geq n_0)$: $2^n \geq (n+2)^2$

Exercice 15

Pour tout $n \in IN$ on considère les nombres a_0 , a_1 , a_2 , ……….. , a_n tels que :

les nombres a_i ont tous le même signe et $(\forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}) : a_i > -1$

Montrer que : $(\forall n \in IN)$: $(1 + a_0) \ldots\ldots (1 + a_n) > 1 + a_0 + \cdots\cdots a_n$

Exercice 16

Pour tout $n \in IN^*$ on considère le polynôme $P_n(x) = n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1$

Montrer que Pour tout $n \in IN^*$ le polynôme P_n est divisible par $(x-1)^2$

Exercice 17

Soit $n \in IN^*$. Montrer que : $(\forall k \geq 1)$: $n^k + k n^{k-1} \leq (n+1)^k$

Exercice 18

Soient a et $b \in IR^{*+}$ tels que $a \neq b$. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$

Exercice 19

On considère les nombres u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3……… tels que

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in IN) : u_n < 2$ 2) Montrer que : $(\forall n \in IN) : u_n < u_{n+1}$