الأستاذ : علي الشريف . نيابة الخميسات	تمارين درس الأعداد العقدية .ص1	قسم : الثانية باكالوريا .ع.ت ثانوية المختار السوسي – المعازيز-

التمرين رقم 1 :

أكتب الأعداد العقدية التالية على الشكل الجبري .

1) $(1-i)(1+i)$, 2) $(2-5i)(3+i)$

3) $(2-i)^2$, 4) $(1+i)(1-2i)(1+3i)$

5) $(2-i)^3$, 6) $\dfrac{(3+2i)(1+i)}{i-1}$

7) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$, 8) $\dfrac{2-3i}{1+i}+\dfrac{1-2i}{1-i}$

9) $\dfrac{4-3i}{2-i}-\dfrac{1-i}{2-i}$.

التمرين رقم 2 :

نعتبر : $f(z)=\dfrac{1+z+z^2+z^3}{1+z}$; $(z\neq -1)$

1) أحسب : $f(2+i)$; $f(i-1)$; $f(i)$

2) حل في C المعادلة : $f(z)=0$.

التمرين رقم 3 :

حل في C المعادلة :

1) $(1+2i)z-(i-1)=i.z-3$.

2) $z.(z+i)(1-i-z)=0$.

3) $\dfrac{1+2i.z}{1+2z}=i.\dfrac{z-1}{z+3}$, 4) $(1-i).z=(2+i)^3$.

5) $(1+i).z=(1-i)^4$, 6) $\left(\dfrac{2-i}{1-2i}\right).z=\dfrac{1+i}{1-3i}$.

7) $\left(\dfrac{1-i}{2+i}\right).z=(2-3i)^2$, 8) $2.z-\bar{z}=3-6i$

9) $-i.\bar{z}+(2-3i).z=1$.

10) $4.z^2+8.|z|^2-3=0$.

التمرين رقم 4 :

حل في C المعادلة :

1) $z^2+4=0$, 2) $z^2-z+2=0$

3) $2.z^2+\sqrt{2}.z+1=0$

4) $4.z^2-12.z+25=0$.

5) $z^3+2.z^2+2.z+1=0$.

6) $z^3+3.z^2+4.z+4=0$.

7) $\left(\dfrac{z-2}{z-4.i}\right)^2-6.\left(\dfrac{z-2}{z-4.i}\right)+13=0$

التمرين رقم 5 :

نعتبر :

$$f(z) : C\to C$$
$$z\to z^2+1$$

1) أحسب الجزء الحقيقي و التخيلي ل $f(z)$ بدلالة $Re(z)$ و $Im(z)$.

2) حدد مجموعة الأعداد العقدية z حيث $f(z)$ عدد حقيقي .

التمرين رقم 6 :

نعتبر : $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$; $(z\neq i)$

نضع : $z=x+.iy$.

1) أحسب الجزء الحقيقي و التخيلي ل $f(z)$ بدلالة x و y

2) حدد مجموعة الأعداد العقدية z حيث $Im(z)=0$.

3) أكتب z بدلالة $f(z)$ ثم أجب على السؤال 2) .

التمرين رقم 7 :

1) أنشئ في المستوى المنسوب إلى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

النقط :

$A(-1+2.i)$, $B\left(\dfrac{1}{1+i}\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}.i\right)$.

2) حدد لحق المتجهات : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

التمرين رقم 8 :

نعتبر : $f(z)=\dfrac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}$; $(z\neq 1)$

1) أحسب الجزء الحقيقي و التخيلي ل $f(z)$ بدلالة z

2) بين أن مجموعة النقط $M(z)$ حيث $f(z)$ عدد حقيقي هي مستقيم محروم من نقطة .

3) بين أن مجموعة النقط $M(z)$ حيث $f(z)$ تخيلي صرفا أو منعدم .
هي دائرة محرومة من نقطة , محددا معادلتها .

التمرين رقم 9 :

ليكن $z=x+i.y$ عدد عقدي مخالف ل -1 ,

و $f(z)=\dfrac{2.i.z-i}{z+1}$. $(x;y\in IR)$

1) أحسب $\overline{f(z)}$; $Re(f(z))$; $Im(f(z))$; $|z|$ بدلالة x و y

2) حدد E_1 مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|f(z)|=1$

3) حدد E_2 مجموعة النقط $M(z)$ حيث $f(z)$ تخيلي ص

4) حدد نقط تقاطع المجموعتين E_1 و E_2 .

الأستاذ : علي الشريف . نيابة الخميسات	تمارين درس الأعداد العقدية .ص2	قسم : الثانية باكالوريا .ع.ت ثانوية المختار السوسي – المعازيز-

التمرين رقم 10:

حدد مجموعة النقط $M(Z)$ حيث :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\right).Z+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\right).\overline{Z}+1=0$$

التمرين رقم 11 :

حدد عمدة الأعداد العقدية التالية التي معيارها 1 :

1) $z=-1\ ;\ z=1\ ;\ z=i$.

2) $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ z=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.i\right)^3$

4) $z=\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

التمرين رقم 12 :

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية :

1) $z=\sqrt{2}\ ;\ z=-5\frac{\sqrt{3}}{2}\ ; z=-2.i\ ;\ z=2.i$.

2) $z=i-\sqrt{3}\ ;\ z=1-i\ ; z=1+i$.

3) $z=\sqrt{2}.\left(\frac{1+i}{1+i.\sqrt{3}}\right)$.

4) $z=\left(\frac{i}{1-i}\right)^4\ ,\ z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}\right)^{12}$

5) $z=1-\cos(\theta)-i.\sin(\theta)$.

6) $z=\sin(\theta)+2.i.\sin^2(\frac{\theta}{2})$.

7) $z=\cos(\theta)+i.(1+\sin(\theta))\ \ ;\ \theta\in[0;2\pi[$.

التمرين رقم 13 :

أكتب على الشكل الأسي الأعداد العقدية التالية :

1) $2-2.i\ ; 1-i.\sqrt{3}\ ;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.i$.

2) $2.\sqrt{3}.(i-\sqrt{3})\ ;\ 5.(1+i)\ ;\ \sqrt{3}-i$.

3) $(1+i.\sqrt{3})^6\ ;(\sqrt{3}-i)^2\ ;(1+i)^3$.

4) $\frac{(2-2.i)^3}{(1+i)^2}\ ;\ \frac{2+2.i}{1-i.\sqrt{3}}\ ;\frac{1+i}{1-i}$.

التمرين رقم 14 :

أخطط مايلي :

1) $A(x)=\cos^3(x)\ \ ,\ \ B(x)=\sin^3(x)$.

2) $A(x)=\sin^4(x)-3.\sin^2(x).\cos^2(x)$.

3) $A(x)=\cos^3(x).\sin^3(x)\ \ ,\ \ B(x)=\sin^4(x)$

4) $A(x)=4.\cos^3(x)-3.\cos(x)$.

5) $B(x)=3.\sin(x)-4.\sin^3(x)$.

التمرين رقم 15 :

1) أ – حدد الجدرين المربعين للعدد $3-4.i$.

ب - حدد في المجموعة C حلي المعادلة :

$$Z^2-2.(3+i).Z+5+10.i=0$$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي $1+2.i$ و 5 .

بين أن المثلث OAB قائم الزاوية .

3) ليكن θ عمدة للعدد $1+2.i$. أكتب العدد $(1+2.i)^3$ على الشكل الجبري .ثم آستنتج قيمة $\cos(3\theta)$.

التمرين رقم 16:

I) نعتبر (E) المعادلة التالية :

$$(E):z^3-4.(1-i).z^2+16.(1-i).z+64.i=0$$

1) تحقق من أن العدد $-4.i$ حل للمعادلة (E) .

2) حل المعادلة (E) .

3) نعتبر العدد بحيث :

$$(k\in Z):z_k=\left(\frac{1}{4}+i.\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i.\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

أ تبث أن : $z_k=\frac{i}{2^{k-1}}.\sin(\frac{k.\pi}{3})$

ثم آستنتج أن : $z_{2001}=0$

II) المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

لتكن A صورة العدد z_A و النقطة B صورة العدد z_B

بحيث $z_A=2+2.i.\sqrt{3}$ و $z_B=2-2.i.\sqrt{3}$.

1) أنشئ النقطة C صورة العدد بحيث :

$$z_C=\frac{3}{2}.z_A+z_B$$.

2) حدد عمدة للعدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ و آستنتج طبيعة المثلث

ABC

التمرين رقم 17:

نعتبر العدد العقدي a حيث :

$$a=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$$

1) أ - أحسب a^2

ب - حدد معيار و عمدة a^2 .

ج - آستنتج معيار و عمدة العدد العقدي a .

2) ليكن u العدد العقدي حيث : $u=\frac{a}{2+2.i}$

بين أن : $u=\cos(\frac{\pi}{6})+i.\sin(\frac{\pi}{6})$

3) نعتبر في C المعادلة :

$$(E):\ Z^2-i.(3.u^3+4.u^4).Z-12.u^7=0$$

(Z هو المجهول)

أ – أوجد بدلالة u , حلي المعادلة (E) .

ب - أكتب على الشكل المثلثي و على الشكل الجبري كلا من حلي المعادلة (E) .

التمرين رقم 18 :

لتكن E مجموعة الأعداد العقدية التي تخالف 1- و , و f تطبيق من E نحو C بحيث : $f(z)=\frac{i.z-1}{(z+1)^2}$

I) نعتبر في E المعادلة : (1) $f(z)=z$

1) بين أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة :

$$z^3+2z^2+(1-i).z+1=0 \quad (2)$$

2) بين أن المعادلة (2) تقبل حلا على شكل a.i بحيث a عدد حقيقي يجب تحديده .

3) حل في E المعادلة (1) .

II) في هذا الجزء نفترض أن : $|z|=1$

و نضع : $f(z)=Z$

1) بين أن : $\overline{Z}=i.z.Z$.

2) آستنتج أنه إذا كان Z عددا عقديا حقيقيا فإنه منعدم .

التمرين رقم 19 :

نعتبر في C المعادلة (E) التالية :

$$(E):\left(\frac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2=2.i\left|\frac{Z}{Z+3.i}\right|$$

1) بين أن Z يكون حلا للمعادلة(E) إذا و فقط إذا كان

$$\left(\frac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2=i \quad \text{و} \quad |Z+3.i|=2.|Z|$$

(لاحظ أن: $\overline{Z-i}=\overline{Z}+i$)

2) لتكن (ζ) مجموعة النقط M من المستوى العقدي ذات اللحق Z بحيث : $|Z+3.i|=2.|Z|$

بين أن (ζ) دائرة مطلوب تحديد مركزها و شعاعها .

3) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى العقدي ذات اللحق Z بحيث : $\left(\frac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2=i$

بين أن : (Γ) هي آتحاد مستقيمين بآستثناء نقطة مطلوب تحديدها .

4) آستنتج عدد حلول المعادلة (E).

التمرين رقم 20:

نعتبر في المجموعة C المعادلة التالية :

$$(E):\ z^2-(1+\sqrt{3}).z+\frac{(2+\sqrt{3})-i}{2}=0$$

1) أ – حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي 2.i .

ب - حل المعادلة (E)

(نرمز للحلين z_1 و z_2 بحيث $\mathrm{Im}(z_1)<0$)

2) أ – تحقق من أن : $z_2=1+\overline{z_1}$

ب – أكتب z_1 على الشكل المثلثي .

ج - بين أن :

$$z_2=\left(2\cos(\frac{\pi}{12})\right)\left(\cos(\frac{\pi}{12})+i.\sin(\frac{\pi}{12})\right)$$

3) المستوى منسوب إلى م.م.م.م $(O;\vec{u};\vec{v})$

لتكن A و B و C النقط التي ألحاقها هي التوالي

$$a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i \quad \text{و} \quad b=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\text{و} \quad c=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.i$$

أ – بين أن : $AB=AC=\sqrt{2}$

ب- أعط قياسا للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

ج – آستنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين رقم 21:

المستوى منسوب إلى م.م.م.م $(O;\vec{u};\vec{v})$

لكل z من $C-\{-1;1\}$ نضع : $g(z)=\frac{z}{z^2-1}$

1) حدد على الشكل الجبري حلي المعادلة : $g(z)=i$

2) نضع : $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ و $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$.

نعتبر في المستوى النقط : M_1 و M_2 و N . التي ألحاقها على التوالي هي z_1 و z_2 و $\sqrt{3}-\frac{i}{2}$.

أ- بين أن النقط M_1 و M_2 و N مستقيمية

ب – أكتب كلا من العدد ين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ج- أحسب $z_1^{60}+z_2^{60}$.

3) أ – بين أن لكل z من $C-\{-1;1\}$.

$g(z)\Leftrightarrow (z+\overline{z})(|z|^2-1)=0$ تخيلي صرف .

ب- حدد في المستوى المجموعة ζ للنقط M (z) بحيث g (z) عددا عقديا تخيليا صرفا .

قسم : الثانية باكالوريا .ع.ت ثانوية المختار السوسي – المعازيز-	تمارين درس الأعداد العقدية .ص4	الأستاذ : علي الشريف . نيابة الخميسات

التمرين 22:

نعتبر في المجموعة C الحدودية التالية :

$$P(z)=z^3-2(2+3.i).z^2-4.(1-5.i).z+16.(1-i)$$

1) بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا α .

2) أوجد الأعداد العقدية a و b و c بحيث يكون :

$$P(z)=(z-\alpha).(a.z^2+b.z+c)$$

3) حل في C المعادلة : $P(z)=0$

التمرين 23:

نعتبر في المجموعة C الحدودية التالية :

$$P(z)=z^4+4z^3+8z^2+4z+7$$

1) تحقق من أن i حل للمعادلة : $P(z)=0$.

2) بين أنه إذا كان z_0 حل للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\overline{z_0}$ كذلك حل للمعادلة .

3) حدد جميع حلول المعادلة : $P(z)=0$.

التمرين 24:

نعتبر في المجموعة C الحدودية التالية :

$$(\omega\in C)\ (E):z^2-(2+i.\omega).z+i.\omega-\omega+2=0$$

1) حدد بدلالة ω حلي المعادلة (E) .

2) حدد ω بحيث يكون للمعادلة (E) حل مزدوج .

3) حدد ω بحيث يكون الجذرين مترافقين .

التمرين 25:

نعتبر في المجموعة C الحدودية التالية :

$$P(z)=4.z^2+2.(i-4).z^2+3.(3-2.i).z-9+\frac{9}{2}.i$$

1) بين أن المعادلة : $P(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا α يتم تحديده .

2) أ - حدد العددين العقديين a و b بحيث :

$$P(z)=(z-\alpha).(4.z^2+a.z+b)$$

ب- حل في C المعادلة : $P(z)=0$

3) نضع : α و 'z و ''z حلول المعادلة (1) .

و لتكن $A(\alpha)$ و $M(z')$ و $M'(z'')$ صورها في المستوى العقدي .

بين أن المثلث 'AMM قائم الزاوية في النقطة A .

التمرين 26:

نعتبر في المجموعة C المعادلة التالية :

$$(E):2.z^2-(3+i).z+2=0$$

1) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة .

2) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ثم آستنتج قيمة : $z_1^{\,4}+z_2^{\,4}$

التمرين 27:

نعتبر في المجموعة C المعادلة التالية :

$$(E):z^3+(3-i.\sqrt{3}).z^2+2.(1-i.\sqrt{3}).z-i\sqrt{3}=0$$

1) تحقق من أن 1- حل للمعادلة (E) .

2) حدد الحلول الأخرى لهذه المعادلة .

3) أعط الكتابة المثلثية لهذه الحلول .

4) لتكن M_1 و M_2 و M_3 صور هذه الحلول في المستوى العقدي .

بين أن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الأضلاع .

التمرين 28:

نعتبر العدد العقدي : $z=2\cos^2(\theta)+i.\sin(2\theta)$

حيث : $\left(\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$

1) حدد معيار و عمدة z .

2) اعط الكتابة الأسية ل z .

التمرين 29:

نعتبر العدد العقدي : $z=-\frac{\sqrt{2}}{16}(1+i)$

1) حدد معيار و عمدة z .

2) آستنتج الجذور المكعبة ل z .

التمرين 30:

1) أكتب على الشكل المثلثي الاعداد العقدية النالية :

$$z_3=\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ z_2=-3+3.i\ ,\ z_1=1-i.\sqrt{3}$$

2) أحسب : $z_1^{\,6}$ و $z_2^{\,4}$ و $z_3^{\,12}$.

التمرين 31:

ليكن :

$$z=\frac{z_1}{z_2}\ \text{و}\ z_2=\frac{1}{2}.(1+i\sqrt{3})\ \text{و}\ z_1=4.\sqrt{2}(1-i)$$

1) أكتب z_1 و z_2 و z على الشكلين المثلثي و الجبري

2) آستنتج قيمتي : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

التمرين 32:

أكتب العددين $1+i.\sqrt{3}$ و $1-i.\sqrt{3}$ على الشكل المثلثي

ثم أحسب : $(1+i.\sqrt{3})^n+(1-i.\sqrt{3})^n$