

قسم : الثانية باكالوريا علوم.		تمارين درس : الإتصال و النهايات ص 1		الأستاذ : علي الشريف	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 =$	21	تمرين 1 ☺ : أحسب النهايات التالية :			
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2} =$	22	$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 + x + 1) =$	1		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 4} =$	23	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + x + 1) =$	2		
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} =$	24	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3} =$	3		
$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} =$	25	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{(1-x)^2} =$	4		
$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x}{1-x} =$	26	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} =$	5		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 7x^2 - 5}{1 + x + x^2} =$	27	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2} =$	6		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5} - x}{\sqrt{x^2 - x}} =$	28	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x+3}} =$	7		
$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} =$	29	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + 1} =$	8		
$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x(-2)}} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} =$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} =$	9		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x =$	31	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} =$	10		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x}} =$	32	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x =$	11		
$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x(-3)}} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} =$	33	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x} =$	12		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x+3}{3x^2+1} =$	34	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} =$	13		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2-2x-2} =$	35	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 5x} =$	14		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3} =$	36	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} =$	15		
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2} =$	37	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1} =$	16		
$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-2x^2 - x + 6}{x^2 - 2x - 8} =$	38	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} =$	17		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{-1 + 5x^3} =$	39	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) =$	18		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} =$	40	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x+1}-3} =$	19		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 2} + x =$	41	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \cos x}{2 + x} =$	20		

تمرين 2:

أدرس اتصال الدالة f في كل حالة عند x_0 .

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{|x|} ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_0 = 1 ; \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} ; x \in]1, +\infty[\\ f(1) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$x_0 = 1 ; \begin{cases} f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1} ; x \in]-\infty, 1[\\ f(1) = 2 \end{cases}$$

تمرين 3:

أدرس التمديد بالإتصال للدوال التالية عند x_0 .

$$x_0 = 0 ; f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \quad (1)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} ; f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x-1} \quad (2)$$

$$x_0 = 0 ; f(x) = \frac{1+3x}{x^2+x} \quad (3)$$

$$x_0 = 0 ; f(x) = \frac{x^2+|x|}{x} \quad (4)$$

$$x_0 = 2 ; f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \quad (5)$$

تمرين 4:

أدرس إتصال الدوال التالية على المجال I :

$$I = [1, +\infty[; f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{5x - 4} \quad (1)$$

$$I =]0, +\infty[; f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad (2)$$

$$I = [1, 3] ; \begin{cases} f(x) = x - 1 ; x \in [1, 2] \\ f(x) = -2x + 7 ; x \in]2, 3] \end{cases} \quad (3)$$

$$I = [0, 3] ; \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 ; x \in [0, 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} ; x \in]1, 3] \end{cases} \quad (4)$$

تمرين 5:

حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة :

$$I = [-3, -1] ; f(x) = x^2 - 1 \quad (1)$$

$$I = [1, 7] ; f(x) = x^2 - x + 1 \quad (2)$$

$$I =]0, +\infty[; f(x) = \frac{x-3}{2x+7} \quad (3)$$

$$I = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right] ; f(x) = \sqrt{1-3x} \quad (4)$$

تمرين 6:

بين أن المعادلات التالية تقبل حلا وحيدا في المجال I :

$$I = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2} \right] ; x^4 + 2x - 3 = 0 \quad (1)$$

$$I = [-2; -1] ; x^3 + 2 = 0 \quad (2)$$

$$I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0 \right] ; \sin x + \frac{1}{3} = 0 \quad (3)$$

تمرين 7:

نعتبر العددين A و B بحيث :

$$B = -3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \quad \text{و} \quad A = 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}$$

1) أحسب A - B ثم $\sqrt[3]{A \cdot B}$.

2) نعتبر العدد الحقيقي x بحيث :

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$$

أ- أحسب x^3 بدلالة x(لاحظ أن $x = \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$)ب- أستنتج أن : $x = 1$.

تمرين 8:

أحسب العبارات التالية :

$$\text{Arct}\left(\tan\left(-\frac{41\pi}{4}\right)\right) \diamond \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{71\pi}{3}\right)\right) \diamond$$

$$\text{Arc tan}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{11}\right)}\right) \diamond \text{Tan}\left(\arctan\left(\frac{111\pi}{7}\right)\right) \diamond$$

$$\text{Arc tan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arct}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{8}\right) \diamond$$

تمرين 9 :

- (1) أدرس نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.
 (2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x - \frac{1}{2}$
 مقارب مائل للمنحنى C_f .

تمرين 15 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; \pi]$ ب :
 $f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$
 (1) أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ منحنىها في م.م.
 . $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- (2) لتكن F قصور الدالة f على المجال $[\frac{\pi}{3}; \pi]$.

- أ - حدد E صورة المجال $[\frac{\pi}{3}; \pi]$ بالدالة F .
 ب - بين أن $\forall \lambda \in E$ المعادلة $F(x) = \lambda$
 تقبل حل وحيد في المجال $[\frac{\pi}{3}; \pi]$.

تمرين 16 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب :
 $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$
 (1) أحسب $f(-\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$.
 (2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول مختلفة
 محصورة بين 1 و -1 .
 (3) نضع $x = \cos(\alpha)$.
 أ - عبر عن $\cos(3\alpha)$ بدلالة $\cos(\alpha)$.
 ب - حدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

تمرين 17 :

- نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
 (1) أدرس إشارة الدالة f على مجموعة تعريفها .
 (2) أ - أدرس اشتقاق الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.
 ب - هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 .
 (3) أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.
 (4) أنشئ منحنى الدالة f في م.م.م $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm})$
 (5) أ - بين أن المعادلة $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد في
 . \mathbb{R}
 ب - حل المتراحة $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x}$

- (1) حدد D_f ثم نهايات f عند المحطات .
 (2) نعتبر g قصور الدالة f على المجال $I =]0, 2[$.
 أ - بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده .
 ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 10 :

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

- (1) بين أن f محدودة على \mathbb{R} .
 (2) أدرس زوجية الدالة f .
 (3) أدرس اشتقاق الدالة f عند 0 .
 (4) بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو $] -1; 1[$.

تمرين 11 :

- (1) بين أن لكل عدد حقيقي x موجب : $\sin(x) \leq x$
 (2) بين أن لكل عدد حقيقي x موجب :
 $* 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$
 (3) بين أن المتفاوتة * صحيحة أيضا إذا كان x سالب .
 (4) أدرس النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

تمرين 12 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب :
 $f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}$
 (1) حدد صورة المجال $]0; +\infty[$ بالدالة f .
 (2) بين أن لكل عدد حقيقي λ من المجال $]0; 1[$ ،
 المعادلة $f(x) = \lambda$ تقبل حل وحيد في المجال $]0; +\infty[$

تمرين 13 :

- نعتبر الدالة g المعرفة ب : $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
 (1) حدد مجموعة تعريف الدالة g .
 (2) حدد الدالتين u و v بحيث $g(x) = u \circ v(x)$.
 (3) أدرس نهاية الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$.
 (4) قارن $\sqrt{x^2 - 4}$ و x بالنسبة ل $x > 2$.
 (5) أستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - 2x)$

تمرين 14 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب :
 $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

