SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

الدورة العادية 2005

- يتكون هذا الموضوع من أسئلة مستقلة فيما بينها و تمرينين و مسألة.
- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.

أسئلة : (أربع نقط و نصف)

1) حل في C المعادلة : $z^2 - 2(1+2i)z + 1 + 4i = 0$.(1ن)

2) بين أن : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = 1$. (1ن)

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx = \frac{2e^3+1}{9}$. (1ن)

4) بين أن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \frac{\pi}{6}$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x-1}$)(1.5ن)

التمرين الأول : (نقطتان و نصف)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ،نعتبر المستوى(P) الذي معادلته $x + y - 3 = 0$ و الفلكة S التي معادلتها $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

1) بين أن المستوى(P) مماس للفلكة S .(1ن)
2) حدد مثلوث إحداثيات نقطة تماس S و (P) .(1.5ن)

التمرين الثاني : (ثلاث نقط)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء وسبع كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس.

1) نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق. ليكن A و B الحدثين التاليين :

A :" الكرتان المسحوبتان لونهما أسود"

B :" من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة لونها أسود"

بين أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{7}{15}$ و أن احتمال الحدث B يساوي $\frac{8}{15}$.(1.25ن)

2) نعتبر التجربة العشوائية التالية : نسحب كرة واحدة من الصندوق، فإذا كانت بيضاء نتوقف عن السحب و إذا كانت سوداء نضعها جانبا ثم نسحب كرة ثانية و أخيرة من الصندوق . ليكن C و D الحدثين التاليين :

C :" الحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى"

D :" الحصول على كرة بيضاء"

أ- احسب احتمال الحدث C .(0.75ن)

ب- بين أن احتمال الحدث D يساوي $\frac{8}{15}$.(1ن)

SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

مسألة : (عشر نقط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=x-1-\ln(x)$ و $h(x)=x+(x-2)\ln(x)$.

1) أ- احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ثم ادرس منحى تغيرات الدالة g .(0.75ن)

ب- استنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$. (0.25ن)

2) أ- بين أن $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.(0.5ن)

ب- بين أن $(x-1)\ln(x)\geq 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.(0.5ن)

3) استنتج أن $h(x)\succ 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.(0.5ن)

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=1+x\ln(x)-(\ln(x))^2$ و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

1) أ- احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا. (0.5ن)

ب- احسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.(1ن)

(لاحظ أن $f(x)=1+x\ln(x)\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)$).

2) أ- بين أن $f'(x)=\frac{h(x)}{x}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$. (0.5ن)

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا $]0,+\infty[$.(0.25ن)

3) ليكن (Δ) المستقيم المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1,1)$.

أ- بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) هي $y=x$.(0.5ن)

ب- تحقق من أن : $f(x)-x=(\ln(x)-1)g(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$. (0.5ن)

ج- ادرس إشارة $f(x)-x$ ثم استنتج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .(1ن)

4) أنشئ (C_f) و (Δ) في نفس المعلم .(نقبل أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و 1.5)(0.75ن)

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من IN .

1) بين بالترجع أن $1\prec u_n\prec e$ لكل n من IN .(0.5ن)

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.(يمكنك استعمال السؤال 3)ج- من الجزء الثاني).(1ن)

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.(1ن)