# الدورة العادية 2005

## أسئلة :

1) نحسب المميز المختصر: $\Delta' = (1+2i)^2 - (1+4i) = -4 = (2i)^2$

إذن $z_1 = 1$ و $z_2 = 1+4i$ .

2) لدينا $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \left[1, \frac{\pi}{6}\right] \Leftarrow \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = [1, 2\pi] = 1$ .

3) $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow I = \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx$

إذن : $I = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2e^3+1}{9}$ .

4) نضع $t = \sqrt{x-1}$ إذن $\left.\begin{matrix} t = 1 \Leftarrow x = 2 \\ t = \sqrt{3} \Leftarrow x = 4 \end{matrix}\right\}$ و $x = t^2 + 1 \Leftarrow dx = 2t\,dt$

ومنه $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2[arctg(t)]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

## التمرين الأول:

1) لدينا $\Omega(1,0,1)$ مركز الفلكة $(S)$ و $r = \sqrt{2}$ شعاعها.

$d(\Omega,(P)) = \frac{|1+0-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r \Leftarrow (P)$ مماس للفلكة $(S)$ .

2) نقطة تماس $(S)$ و $(P)$ هي $H$ المسقط العمودي للنقطة $\Omega$ على $(P)$ .

ليكن $(\Delta)$ المستقيم المار من $\Omega$ والعمودي على $(P)$ ، إذن $\vec{n}(1,1,0)$ المنظمية على $(P)$ موجهة ل $(\Delta)$ .

$H$ هي تقاطع $(\Delta)$ و $(P)$ ، مثلوث إحداثياتها هو حل النظمة: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1 \\ x+y-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1+t+t-3 = 0$

إذن $t = 1$ و منه $H(2,1,1)$ .

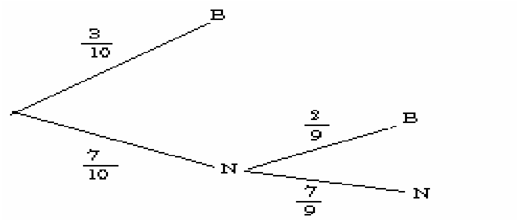
## التمرين الثاني

1) $p(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$ و $B=\overline{A} \Rightarrow p(B)=1-p(A)=\frac{8}{15}$ .

2) أ- $p(C)=\frac{3}{10}$ .

ب- $p(D)=p(C)+p(\overline{C})p_{\overline{C}}(D)=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}.\frac{3}{9}=\frac{8}{15}$ .

يمكن استعمال الشجرة :




## مسألة :

**الجزء الأول :**

1) أ- لكل $x$ من $]0,+\infty[$ لدينا $g'(x)=\frac{x-1}{x}$ .

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ ، إذن جدول تغيرات الدالة $g$ هو:

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | | | 0 | | |
| g(x) | | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | |

ب- الدالة $g$ تقبل قيمة دنيا عند النقطة 1 ، إذن $g(x)\geq g(1)=0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ .

2) أ- لكل $x$ من $]0,+\infty[$ ، لدينا $1+g(x)+(x-1)\ln(x)=x-\ln(x)+(x-1)\ln(x)$

$$=x+(x-2)\ln(x)=h(x)$$

ب- من الجدول التالي :

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x-1 | | $-$ | 0 | $+$ | |
| ln(x) | | $-$ | 0 | $+$ | |
| (x-1)ln(x) | | $+$ | 0 | $+$ | |

نستنتج أن $(x-1)\ln(x)\geq 0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ .

3) $(x-1)\ln(x)\geq 0$ و $g(x)\geq 0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[ \Rightarrow h(x)\geq 1$

إذن $h(x)\succ 0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ .

**الجزء الثاني:**

1) أ- $\lim\limits_{0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{0^+}x\ln(x)=0$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{0^+}f(x)=-\infty$ .

التأويل المبياني : المنحنى $C_f$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$ .

ب- $f(x)=1+x.\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ و $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{+\infty}f(x)=+\infty$ .

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}+\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ .

التأويل المبياني : المنحنى $C_f$ يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$ .

2) أ- لكل $x$ من $]0,+\infty[$ ، لدينا $f'(x)=\ln(x)+1-2\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{h(x)}{x}$ .

ب- حسب السؤال 3 من الجزء الأول، $h(x)\succ 0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ ، إذن $f'(x)\succ 0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ . و بالتالي $f$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ .

3) أ- معادلة $(\Delta)$ هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و $f'(1)=h(1)=1$

إذن : $(\Delta)\ :\ y=x$ .

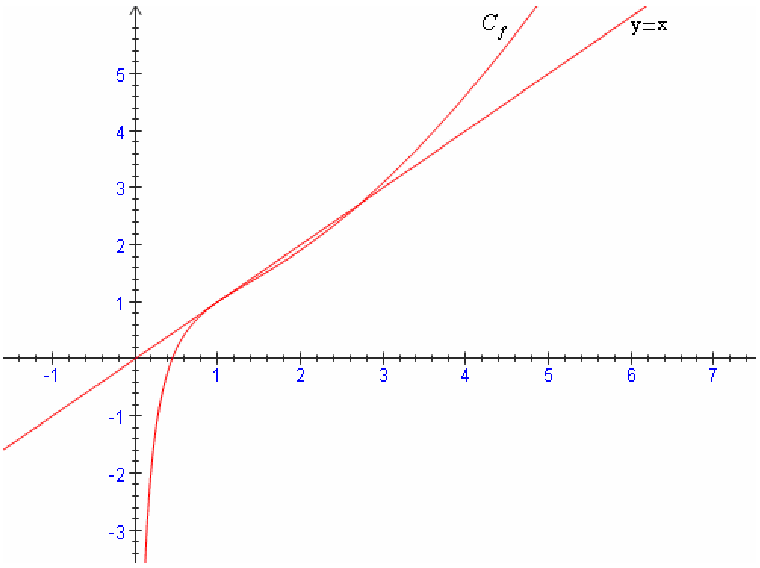
ب- لكل $x$ من $]0,+\infty[$ ، لدينا

$$\begin{aligned} f(x)-x &= 1-(\ln(x))^2+x\ln(x)-x \\ &= (1-\ln(x))(1+\ln(x))-x(1-\ln(x)) \\ &= (1-\ln(x))(1+\ln(x)-x)=(\ln(x)-1)g(x) \end{aligned}$$

ج- $g(x)\geq 0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ ،إذن إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $\ln(x)-1$ .

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)-1$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | ‖ | $C_f$ تحت $(\Delta)$ | تقاطع | $C_f$ فوق $(\Delta)$ | |

4)المنحنى:




**الجزء الثالث :**

1) من أجل $n=0$ : $1 \prec u_0 = \sqrt{e} \prec e$ إذن العلاقة صحيحة.
نفترض أن $1 \prec u_n \prec e$ ، وبما أن $f$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ فإن $f(1) \prec f(u_n) \prec f(e)$
إذن $1 \prec u_{n+1} \prec e$ و منه $1 \prec u_n \prec e$ لكل $n$ من $IN$ .
2) حسب السؤال 3)ج من الجزء الثاني: $f(x)-x \le 0$ لكل $x$ من $]0,e]$
بما أن $1 \prec u_n \prec e$ فإن $f(u_n)-u_n \le 0$ أي $u_{n+1} \le u_n$ لكل $n$ من $IN$ .
3) المتتالية $(u_n)$ تناقصية و مصغورة بالعدد 1 ، إذن فهي متقاربة.
الدالة $f$ متصلة على المجال $]1,e[$ و $I=]1,e[$ و $f(I)=I$ (حسب السؤال 1من الجزء الثالث) والمتتالية متقاربة ، إذن
نهايتها $l$ تحقق $f(l)=l$ و $l \in [1,e]$ (المجال **مغلق**).
$g(l)=0$ أو $\ln(l)-1=0$ $\Leftrightarrow$ $f(l)=l$ حسب السؤال 3)ب من الجزء الثاني.
$l=1$ أو $l=e$ $\Leftrightarrow$
بما أن المتتالية $(u_n)$ تناقصية فإن $l=1$ .