

**تمرين 1**

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x) \quad (2) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} - 2x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - 2x^3} - \sqrt{-x^3 + x + 1}) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x + 2}) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1 - 3x} - 2}{x + 1} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 + \sqrt{-x + 1}}{x^2 - \sqrt{x^2 + 2}} \quad (6) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x} - 1}{x^2 - \sqrt{x^4 - 1}} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x} - x} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{3 - x} - 3}{x + 1} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x - 6 + \sqrt{3x - x^2}}{x + 3} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{3} \cos x - \sin x - \sqrt{3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{6x - \pi} \quad (14)$$

**تمرين 2**

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & ; x < 1 \\ x^2 - 2x - 8 & ; x \geq 1 \\ |x-2| - 2 & ; x \geq 1 \end{cases} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) حدد  $D_f$  وادرس اتصال  $f$  عند  $x_0=1$  (2) احسب  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$ (3) هل الدالة  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 4**تمرين 3**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - a}{x - 2} & ; x > 2 \\ \frac{2x^2 + b - a}{x} & ; x \leq 2 \end{cases} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بمايلي}$$

حدد العددين  $a$  و  $b$  بحيث تكون الدالة  $f$  متصلة في النقطة 2**تمرين 4**

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) حدد  $D_f$  وأحسب النهايات عند محددات  $D_f$ (2) هل الدالة  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في كل من 2 و -2 ؟**تمرين 5**

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}{x^2} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) حدد  $D_f$ (2) بين أن الدالة  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في 0 .**تمرين 6**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{2 \cos x - 1} & ; x \neq \frac{\pi}{3} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي :}$$

بين أن  $f$  متصلة في  $\frac{\pi}{3}$ .

### تمرين 7

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{2}{x}\right), x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ : نعتبر الدالة } f$$

(1) ادرس اتصال  $f$  في 0. (2) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

### تمرين 8

(1) بين أن المعادلة  $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$  تقبل على الأقل حلا في  $\mathbb{R}$

(2) بين أن المعادلة  $3x^7 + 2x^5 + x - 10^6 \sqrt[4]{3} = 0$  تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{R}$

(3) نعتبر الدالة  $f(x) = x^4 + x - 1$ . بين أن المنحنى  $C_f$  يقطع محور الأفاصيل في المجال  $[0,1]$

(4) نعتبر الدالتين :  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = -x^3$

بين أن المنحنيين  $C_g$  و  $C_f$  يتقاطعان في نقطة وحيدة أفصولها  $\alpha$  بحيث :  $-\frac{7}{8} < \alpha < -\frac{3}{4}$

### تمرين 9

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[0,1]$  بحيث  $f(0)=0$  و  $f(1)=1$

بين أن  $(\exists c \in ]0,1[): f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

### تمرين 10

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a,b]$  بحيث

$f(a) < ab$  و  $f(b) > b^2$  مع  $(a < b)$

بين أنه يوجد عدد حقيقي  $c$  من  $[a,b]$  بحيث  $f(c) = bc$

### تمرين 11

لتكن  $f$  دالة عددية تحقق  $|\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: f(x) - f(y)| \leq k \times |x - y|$  مع  $k \in \mathbb{R}_+^*$

بين أن  $f$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$

### تمرين 12

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[0,1]$  بحيث  $f(1)=f(0)=0$  و  $(\forall x \in [0,1]): f(x) \geq 0$ .

بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists c \in [0,1]): f(c) = f(c + \frac{1}{n})$

### تمرين 13

لتكن  $f$  دالة معرفة من  $\mathbb{R}^+$  نحو  $\mathbb{R}^+$  بحيث :  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}^+$  و  $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f(x) < x$

(1) بين أن  $f(0) = 0$ .

(2) بين أن :  $(\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^{+2}))(\exists M \in [0,1])(\forall x \in [a,b]): f(x) \leq Mx$

### تمرين 14

(1) بين أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  المعادلة  $\text{Arcos}(x) - x^n = 0$  تقبل حلا وحيدا  $a_n$  في المجال  $]0,1[$ .

(2) قارن العددين  $a_n$  و  $\frac{1}{2}$ .

(3) بين أنه :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*): a_{n+1} > a_n$ .

### تمرين 15

لتكن  $f$  دالة عددية متصلة على  $[a,b]$  حيث  $\forall x \in [a,b]: f(x) > 0$ .

أثبت أن  $\exists m > 0, f(x) \geq m$

**تمرين 16**

$$A = 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \text{ et } B = -3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \quad \text{نعتبر العددين}$$

(1) أحسب  $A - B$  و  $\sqrt[3]{AB}$ 

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \quad \text{نعتبر العدد}$$

(a) أحسب  $x^3$  بدلالة  $x$  . (b) استنتج أن  $x = 1$  .**تمرين 17**

حل في IR المعادلات التالية :

$$(1) (2x-1)^5 = 32 \quad (2) (x+1)^3 = -27 \quad (3) x^6 = 6 \quad (4) x^4 = -2 \quad (5) \left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 + 8 = 0$$

$$(6) \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2} \quad \text{(يمكن وضع } t = \sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}} \text{)}$$

**تمرين 18**

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1 \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) ادرس تغيرات  $f$  وانشئ منحناها .(2) ليكن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $I = [1, +\infty[$ (a) بين أن  $g$  تقابل من المجال  $I$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده(b) حدد  $g^{-1}(x)$  وارسم  $C_{g^{-1}}$ **تمرين 19**

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

بين أن  $f$  تقابل من  $[-1, 1]$  نحو مجال يجب تحديده ثم حدد  $f^{-1}(x)$ **تمرين 20**

$$f(x) = \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) حدد  $D_f$ (2) ليكن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $I = ]0, 2]$ (a) بين أن  $g$  تقابل من المجال  $I$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده(b) حدد  $g^{-1}(x)$ **تمرين 21**نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :

$$f(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^3$$

(1) حدد حيز تعريف الدالة  $f$  .(2) (a) بين أن الدالة  $f$  تقابل من المجال  $[-1, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده(b) حدد  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$  .**تمرين 22**

$$f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) حدد حيز تعريف الدالة  $f$  .(2) حل في  $IR^+$  المعادلة  $f(x) = x$ (3) (a) بين أن  $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^3 + 1$ (b) بين أن الدالة  $f$  تزايدية قطعاً من المجال  $[0, +\infty[$ (c) بين أن الدالة  $f$  تقابل من المجال  $[0, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده(d) حدد  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$  .

**تمرين 23**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي

$$f(x) = -x - 3\sqrt[3]{(1-x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x} + 1$$

- (1) حدد حيز تعريف الدالة  $f$ .
- (2) بين أن  $f$  تقابل من  $]-\infty, 1]$  نحو مجال يجب تحديده ثم حدد  $f^{-1}(x)$ .
- (3) حل في  $]-\infty, 1]$  المعادلة  $f(x) = 1$ .

**تمرين 24**

نعتبر الدالة  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

- (1) بين أن  $(\forall x \in ]-1, +\infty[) : f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
- (b) بين أن  $f$  تقابل من  $]-1, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يتم تحديده ثم حدد  $f^{-1}(x)$
- (2) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة:  $f^{-1}(x) = f(x)$

**تمرين 25**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب:  $f(x) = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{x^2})^3}$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة  $D_f$
- (2) ليكن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $I = [0, 8]$
- بين أن  $g$  تقابل من  $I$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده ثم حدد  $g^{-1}(x)$
- (3) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = x$ .

**تمرين 26**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x}}$

- (1) بين أن  $f$  تقابل من  $]0, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده
- (2) بين أن  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$
- (3) حدد  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$ .
- (4) حل في  $]0, +\infty[$  المعادلة  $f(x) = \sqrt{5}$

**تمرين 27**

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{-x^3 + 2x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + 2x) \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - x + 1} - x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{-3x^3 - 1} + x \sqrt[3]{3}) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{-8x^3 + x^2 + 1} + 2x) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - 1} - 2x) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[4]{-x^3 + 4x + 1} - \sqrt{2-x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x}{\sqrt[3]{1-x} - x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x+2} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} + x^2 + x - 2}{x-1} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + x^2 + x}{x+1} \quad (13)$$

### تمرين 28

أثبت المتساويات التالية :

$$\text{Arc tan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arc tan}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\text{Arc tan}\frac{1}{2} + \text{Arc tan}\frac{1}{5} + \text{Arc tan}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\text{Arc tan}\frac{1}{3} + \text{Arc tan}\frac{1}{7} - \text{Arc tan}\frac{1}{2} = 0 \quad (3)$$

$$(\forall x > 0) : \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$(\forall x < 0) : \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \cos(\text{Arc tan } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (6)$$

$$0 \leq \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leq \frac{\pi}{8} \quad (\text{لاحظ أن}) \quad 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} \quad (7)$$

$$(\forall x > 0) : \text{Arc tan}(x+1) - \text{Arc tan } x = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) \quad (8)$$

### تمرين 29

أحسب  $\arctan 2 + \arctan 3$

### تمرين 30

حل في IR المعادلة :

$$\text{Arc tan}\left(\frac{x-8}{8}\right) - \text{Arc tan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

### تمرين 31

حل في IR المعادلات التالية .

$$\text{Arc tan}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) + \text{Arc tan}(x) = \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \text{Arc tan } 2x + \text{Arc tan}(3x) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

### تمرين 32

نعتبر في IR المعادلة

$$(E) : \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

(1) بين المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في IR وأن هذا الحل ينتمي إلى  $]0,1[$  .

(2) حل المعادلة (E) .

### تمرين 33

أحسب النهايات لتالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\text{Arc tan } x - \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \text{Arc tan}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left( \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \text{Arc tan } x - \frac{\pi}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} x \right) \quad (7)$$

**تمرين 34**

نعتبر الدالة  $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)$

(1) حدد  $D_f$  .

(2) ليكن  $g$  قصور  $f$  على  $]0, +\infty[$  .

(a) بين أن  $g$  تقابل من  $]0, +\infty[$  نحو مجال يجب تحديده .

(b) حدد  $f^{-1}(x)$  .

**تمرين 35**

حل في IR المعدلتين :

$$\text{Arc tan}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) + \text{Arc tan}(x) = \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \text{Arc tan } 2x + \text{Arc tan}(3x) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

**تمرين 36**

نعتبر في IR المعادلة  $(E) : \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

(1) بين المعادلة  $(E)$  تقبل حلا وحيدا وأن هذا الحل ينتمي إلى  $]0,1[$  .

(2) حل المعادلة  $(E)$  .