2باك ر أ الفرض2(د2) 2س 05-04-16

مولاي سليمان ذ.جابر

التمرين1: لكل n من IN* نضع $I_n=\int_0^{1/2}(1-2t)^n e^{-t}dt$

1)أ-بين أن $\forall n\in IN^*,\forall t\in[0,\frac{1}{2}]:\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-2t)^n\le(1-2t)^n e^{-t}\le(1-2t)^n$

ب- استنتج تأطيرا للتكامل I_n ثم احسب $\lim(I_n)$.

2)أ- احسب التكامل I_1

ب- بمكاملة بالأجزاء أثبت أن لكل n من IN* لدينا: $I_{n+1}=1-2(n+1)I_n$

ج- احسب I_2 و I_3

التمرين2: لتكن الدالة F المعرفة على]∞+,0[بـ: $F(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}dt$

1) أثبت أن Fقابلة للاشتقاق على]∞+,0[و احسب F '(x)

2) ادرس تغيرات F على]∞+,0[(دون حساب النهايات) وأعط إشارة F(x)

3) أ- أحسب بمكاملة بالأجزاء التكامل $\int_1^x\frac{\ln t}{t^2}dt$ لكل $x>0$

ب- استنتج أن $\forall x>1:\frac{1}{2}(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x})\le F(x)\le(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x})$

4) نقبل الخاصية: إذا كانت دالة متصلة ورتيبة على[∞+,a[فإنها تقبل نهاية عند ∞+

أثبت أن F تقبل نهاية منتهية L عند ∞+ و أن: $\frac{1}{2}\le L\le1$

5) أ- أثبت أن لكل x>0 : $F(x)=F(\frac{1}{x})$

ب- أثبت أن F تقبل نهاية عند 0 على اليمين و حددها.

6) نعتبر الدالة G حيث: $\begin{cases}G(x)=F(x);x>0\\G(0)=L\end{cases}$

أ- أثبت أن : $\forall x\in]0,1[:\frac{G(x)-G(0)}{x}\le\frac{1}{2}\ln x$ (يمكنك استعمال TAF)

ب- ادرس إذن قابلية اشتقاق G عند 0 على اليمين ثم أول النتيجة هندسيا

ج- أنشئ منحنى G نأخذ L≃0,7 و G(2)≃0,4

التمرين3: نعتبر في $M_3(IR)$ المصفوفات $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

و $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و J=-I و B=-A ونضع G={ I , J , A , B }

1) ضع جدول (G , x)

2) بين أن (G , x) زمرة تبادلية.

3) نعتبر المجموعة { E={ M(a,b)=aI + bA / (a,b)∈IR²

أ- أثبت أن (E , +) زمرة تبادلية.

ب- أثبت أن (E , + , x) حلقة واحدية تبادلية و غير كاملة؟

4) حدد داخل E حلقة كاملة.