

<http://sefroumaths.site.voila.fr>

تمرين 1

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بما يلي :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n\sqrt{n^2+k}}$$

(1) بين أن  $(\forall k \in \{1,2,\dots,n\}) : \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{n}$

(2) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n}$

(3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة وأحسب  $\lim u_n$ .

تمرين 2

نعتبر المتتاليتين  $(u_n), (v_n)$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} ; v_n = \frac{2}{u_n} \end{cases}$$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$

(2) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < v_n < u_n$

(3) أدرس رتبة  $(u_n)$  و  $(v_n)$ .

(4) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)$

(5) بين أن  $(u_n), (v_n)$  متحاديان

(6) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n^2 < 2 < u_n^2$

(b) استنتج  $\lim u_n$  و  $\lim v_n$ .

تمرين 3

(1) (a) بين أن لكل  $a$  من  $Z$  :  $a^2 \equiv 0[3]$  أو  $a^2 \equiv 1[3]$

(b) استنتج أن  $(\forall (a,b) \in Z^2) : a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$

(2) ليكن  $(x,y,z) \in Z^3$  بحيث  $x^2 + y^2 = 3z^2$

(a) بين أن  $x \equiv y \equiv 0[3]$  و  $3z^2 \equiv 0[9]$

(b) استنتج أن  $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

تمرين 4

(1) بين أن  $(\forall a,b \in Z^2) : a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge (a^2 + ab + b^2) = 1$

(2) حل في  $Z^2$  النظمة :

$$\begin{cases} 19(a+b) = 5(a^2 + ab + b^2) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

(3) حل في  $Z^2$  المعادلة :  $19(a+b)(a \wedge b) = 5(a^2 + ab + b^2)$

