ح.بوعيون (2002-2003)	**فرض محروس 5**	**الثانية س ب ع ر** **ثا . الحسن اليوسي**

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \ ; \ x\neq -1 \text{ و } x\neq 0 \\ f(-1)=1 \text{ و } f(0)=e \end{cases}$$

I) 1) a) بين أن : $(\forall x\in \left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[) : f(x)=e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}$

b) ادرس اتصال f في 0 وعلى يمين -1

2) a) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) بين أن $(\forall x \in \left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[) : f(x)-x=x(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}-1)+e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$

c) استنتج طبيعة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$.

3) بين أن $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

4) a) بين أن $\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2=\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt$

b) بين أن $(\forall t\geq -\frac{1}{2}) : \frac{t^2}{1+t}\leq 2t^2$

c) بين أن $(\forall x\geq -\frac{1}{2}) \ : \ \left|\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt\right|\leq \frac{2}{3}|x|^3$

d) استنتج أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

e) أدرس اشتقاق f في 0 وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

5) a) نعتبر الدالة $g(x)=x-\ln(x+1)$.

أدرس تغيرات الدالة g واستنتج أن $(\forall x\geq -1) : g(x)\geq 0$

b) بين أن $(\forall x \in \left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[) : \ f'(x)=\frac{x+1}{x^2}e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \ g(x)$

c) أدرس تغيرات f وضع جدول تغيراتها .

6) أنشئ المنحنى C_f .

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$

1) a) بين أن $(\forall x\geq -1) : f(x)\geq x$.

b) استنتج أن $(\forall x\geq 0) : h(x)\geq \frac{x}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

2) a) بين أن : $h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad : \quad (\forall x \neq 0)$

b) بين أن h قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[\cup]-1,0[$ و أن $h'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - h(x))$

c) بين أن $(\forall x \in [-1,0]) : f(x) \leq h(x) \leq e$ و أن

$$(\forall x \in [0,+\infty[) : e \leq h(x) \leq f(x)$$

d) ضع جدول تغيرات الدالة h .