الثانية ع ر (2003-2004)	فرض محروس 1	ثا . الحسن اليوسي ح.بوعيون

تمرين1 لتكن f دالة معرفة من IR نحو IR بحيث f متصلة في 0 و تحقق :

$$(\forall(x,y)\in IR^2):\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

0,5 **1)** بين أن $f(0)=0$

0,5 **2)** بين أن :

$$(\forall(x,y)\in IR^2):\ f(x)=f(x-y)+f(y)$$

1 **3)** استنتج أن الدالة f متصلة على IR .

تمرين2

لكل n من IN^* نعتبر الدالة f_n المعرفة بمايلي :

$$f_n(x)=\sqrt{1-x^{\frac{1}{n}}}\quad (\text{نقبل أن } 0^{\frac{1}{n}}=0)$$

0,5 **I) 1)** حدد حيز تعريف الدالة f_n .

0,5 **2)** بين أن f_n تناقصية قطعا على $[0,1]$.

1 **3)** بين أن f_n تقابل من $[0,1]$ نحو مجال يجب تحديده

1 **4)** حدد $f_n^{-1}(x)$.

II) نعتبر الدالة g_n المعرفة على $[0,1]$ بما يلي :

$$g_n(x)=Arc\sin\left(\frac{\sqrt{1-x^{\frac{1}{n}}}-x^{\frac{1}{2n}}}{\sqrt{2}}\right)$$

1 **1)** بين أن :

$$g_n(x)=Arc\sin\left(\frac{f_n(x)-\sqrt{1-(f_n(x))^2}}{\sqrt{2}}\right)$$

1 **2)** بين أن : لكل $x\in[0,1]$

$$Arc\sin\left(\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)=Arc\sin(x)-\frac{\pi}{4}$$

1 **3)** استنتج أن لكل $x\in[0,1]$

$$g_n(x)=Arc\sin(f_n(x))-\frac{\pi}{4}$$

2 **4)** بين أن g_n تقابل من $[0,1]$ نحو مجال يجب تحديده و حدد $g_n^{-1}(x)$.

1,5 **5) a)** بين أن المنحنى C_{g_n} يقطع المستقيم $(\Delta):y=x$ في نقطة وحيدة أفصولها $a_n\in]0,1[$

1 **b)** بين أن $a_{n+1}\le a_n$

تمرين3

نعتبرالنقطتين $A(2i)$ و $B(2)$ والتطبيقين f و F المعرفين بما يلي :

$$f:\ \mathbb{C}-\{2i\}\to\mathbb{C}-\{2\}$$
و
$$z\to\frac{2\overline{z}}{\overline{z}+2i}$$

$$F:\ P-\{A\}\to P-\{B\}$$
$$M(z)\to M'(f(z))$$

1 **1) a)** بين أن

$$(\forall z\neq 2i):f(z)\in IR\Leftrightarrow z\in iIR$$

0,5 **b)** استنتج صورة محور الأراتيب محروم من A بالتطبيق F .

1,5 **2) a)** بين أن : $OM'=2\dfrac{OM}{AM}$ و

$$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM'})\equiv(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA})\quad[2\pi]$$

0,5 **b)** حدد صورة المستقيم (Δ) واسط القطعة $[OA]$

0,5 **c)** حدد صور الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[OA]$

1,5 **3) a)** بين أن : $BM'=\dfrac{4}{AM}$ و

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM'})\equiv-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

1 **b)** لتكن M نقطة من الدائرة (C) التي مركزها A وشعاعها 1 ولتكن M' صورة M بالتطبيق F . أنشئ النقطة M' انطلاقا من النقطة M .

4) نعتبر الدائرة (C') التي مركزها $\Omega(i)$ وشعاعها 1

0,5 **a)** بين أن :

$$M(z)\in(C')\Leftrightarrow(\exists\alpha\in[0,2\pi[):z=i+e^{i\alpha}$$

1 **b)** بين أن

$$(\forall\alpha\in[0,2\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\})\quad:f(i+e^{i\alpha})\in iIR$$

0,5 **c)** استنتج أن صورة كل نقطة من $(C')-\{A\}$ تنتمي إلى محور الأراتيب .