الثانية ع ر (2003-2004)	فرض محروس 2	ثا . الحسن اليوسي ح.بوعيون

تمرين1

لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ نضع

$a = n^2 - 3n + 6$ و $b = n - 1$

1 (1) بين أن : $a \wedge b = b \wedge 4$

1,5 (2) استنتج $a \wedge b$ حسب قيم العدد n .

تمرين2

1 (1) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^2 + b^2) \wedge ab = 1$

لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$.

2) نعتبرفي $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظمة :

$$(S) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ (x \wedge y).(x \vee y) = 600 \end{cases}$$

ليكن (x, y) حل للنظمة (S) و $d = x \wedge y$

1 (a) بين أن $d = 10$.

1,5 (b) حل النظمة (S) .

تمرين3

لكل n من IN^* نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$

بمايلي : $f_n(x) = 3x^n - x - 1$

1 (1) (a بين أن f_n تزايدية على $\left[\sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}}, +\infty\right[$

وتناقصية على $\left[0, \sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}}\right]$.

0,5 (b) ضع جدول تغيرات f_n واستنتج إشارتها .

0,5 (2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $[0, +\infty[$.

1 (3) أحسب $f_n(1)$ واستنتج أن

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$$

0,5 (4) (a) بين أن : $(\forall x \in]0,1[) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$

1 (b) استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .

0,5 (c) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

5) نضع $\lim u_n = l$.

0,5 (a) بين $0 \le l \le 1$.

1 (b) بين : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \le l$.

1,5 (c) بين أن $l = 1$

تمرين4

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بمل يلي :

$$f(x) = x + \cos(x)$$

1 (1) أدرس تغيرات الدالة f واستنتج أن

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

2) نعتر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,5 (a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 0 \le u_n \le \frac{\pi}{2}$

1 (b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

1 (c) استنتج أن (u_n) متقاربة وأحسب نهايتها .

3) نعتر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$$v_n = \frac{\pi}{2} - u_n$$

0,5 (a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 0 \le v_n \le \frac{\pi}{2}$

0,5 (b) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} = v_n - \sin(v_n)$

4) نقبل أن : $\left(\forall x \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) : 0 \le x - \sin(x) \le \frac{x^3}{6}$

0,5 (a) بين $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 0 \le v_{n+1} \le \frac{1}{6} v_n^3$

b) استنتج أن :

1 $$(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 0 \le v_n \le \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n - 1}{2}} v_0^{(3^n)}$$

c) نفترض أن $\alpha = 1{,}57$

1,5 إذا علمنا أن $3{,}14$ قيمة مقربة بتفريط للعدد π بالدقة 2.10^{-3}

بين أن u_2 قيمة مقربة بتفريط للعدد $\frac{\pi}{2}$ بالدقة 10^{-30}