ثا . الحسن اليوسي ح.بوعيون	فرض محروس 3	الثانية ع ر (2003-2004)

تمرين1

1) بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ (1)

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \arctan(n+1) - \arctan(n) \leq \frac{1}{n^2+1}$$

2) نضع

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n^2+1}$$

a) بين أن : (1,5)

$$(\forall n \geq 0) \ : \ S_{n+1} - 1 \leq \arctan(n+1) \leq S_n$$

b) استنتج أن المتتالية (S_n) متقاربة (1,5)

وأن نهايتها S تحقق $\frac{\pi}{2} \leq S \leq \frac{\pi}{2} + 1$

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \arctan(\frac{1}{x}) & ; \quad x > 0 \\ f(x) = \arccos(\frac{2}{\pi}\arctan x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

1) a) بين أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. (0,5)

b) ادرس اتصال f في 0 . (0,5)

c) أدرس اشتقاق f في 0 وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها . (2)

2) أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ وأول هندسياالنتيجة . (0,5)

3) a) أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (0,5)

b) بين أن (1)

$$(\forall x > 0) \ : \ \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$$

c) أحسب $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^2}$ (1)

d) استنتج أن المستقيم $(\Delta) \ : \ y = x - 2$ مقارب للمنحنى C_f بجوار $+\infty$. (1,5)

4) نعتبر الدالة $g(x) = 2arctan(\frac{1}{x}) - \frac{x-1}{x^2+1}$

a) أدرس تغيرات g على $]0,+\infty[$ (1)

b) استنتج أن :

$$(\forall x > 0) \ : \ 0 < g(x) < \pi + 1$$ (0,5)

c) بين أن :

$$(\forall x > 0) \ : \ f'(x) = (x-1)g(x)$$ (0,5)

d) بين أن :

$$(\forall x \in]0,1[) \ : \ |f'(x)| \leq \pi + 1$$ (0,5)

5) أدرس تغيرات f وضع جدول تغيراتها . (1)

6) أنشئ المنحنى C_f . (1)

7) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} f(u_n) \end{cases}$$

a) بين أن : $(\forall n \in IN) \ : \ 0 \leq u_n \leq 1$ (0,5)

b) بين أن المعادلة : $f(x) = 5x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,1]$. (1)

c) بين باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أن (1,5)

$$(\forall n \in IN) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi+1}{5} |u_n - \alpha|$$

d) بين أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها . (1)

http://sefroumaths.site.voila.fr