

<http://sefroumaths.site.voila.fr>

تمرين 1

$$E = \left\{ M_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad \text{نعتبر المجموعة}$$

(I) 1) بين أن : $M_{(a,b,c)} = M_{(a',b',c')} \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b' \text{ et } c = c'$ (0,5)

2) بين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية . (0,5)

(b) بين أن : $M_{(a,b,c)} \cdot M_{(a',b',c')} = M_{(aa', ab'+ba', ac'+ca'+bb')}$ (0,5)

(c) بين أن : $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية . (1)

(d) حدد U مجموعة العناصر القابلة للمماثلة في $(E, +, \times)$ وحدد مماثل كل عنصر من U . (1)

(e) ماهي بنية (U, \times) . (0,5)

(3) نعتبر المجموعة $H = \left\{ M_{(1,b,c)} \in E / (b,c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ (1)

بين أن (H, \times) زمرة جزئية للزمرة (U, \times) .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} وقابلة للإشتقاق في 0 .

لكل $x \in \mathbb{R}$ نضع $\hat{M}_{(x)} = M_{(1, x, f(x))}$

$\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (H, \times)$

ونعتبر التطبيق

$x \rightarrow \hat{M}_{(x)}$

سنبحث عن الدوال f التي يكون من أجلها φ تشاكلا من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (H, \times) .

(1) بين أنه إذا كانت $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx$ مع $m \in \mathbb{R}$ (1)

فإن φ تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (H, \times)

(2) نفترض أن φ تشاكل

(a) بين أن : $\hat{M}_{(0)} = I$ (* (1) I هي المصفوفة الوحيدة)

$f(0) = 0$ (*)

$\hat{M}_{(x)}^{-1} = \hat{M}_{(-x)}$ (*)

(b) بين أن : $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ (1)

(c) استنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$ (0,5)

(d) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x^2}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ (1)

(e) بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = x f'(0)$ (0,5)

(3) حدد جميع الدوال f المعرفة على \mathbb{R} والقابلة للإشتقاق في 0 والتي يكون من أجلها φ تشاكلا . (0,5)

تمرين 2

نضع $E = IR - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ ونعرف على E العملية "*" بما يلي :

$$(\forall (a, b) \in E^2) : a * b = a + b - 3ab$$

(1) (0,5) بين أن "*" قانون تركيب داخلي في E .

(2) (1,5) بين أن $(E, *)$ زمرة تبادلية .

(3) (0,5) لكل $n \in IN^*$ نضع $a^{(n)} = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}$

بين أن $(\forall n \in IN^*) : a^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n$:

(4) لكل $a \in IR$ نعتبر المصفوفة

$$M_{(a)} = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

(a) (1) بين أن $M_{(a)} \cdot M_{(b)} = M_{(a*b)}$

$\psi : E \rightarrow G$

$a \rightarrow M_{(a)}$

(b) (1) نعتبر المجموعة $G = \{ M_{(a)} / a \in E \}$ ثم التطبيق

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E, *)$ نحو (G, \times)

(c) (1) استنتج بنية (G, \times) ثم حدد $M_{(a)}^{-1}$.

(d) (0,5) حدد $M_{(a)}^n$ لكل $n \in IN^*$.

تمرين 3

في تجربة لدراسة سلوك الفئران ، لدينا فئران يجب أن تختار بين X و Y .

(* إذا اختار الفأر الباب X تلقى صدمة كهربائية تعيده إلى مكانه ليحاول مرة أخرى .

(* إذا اختار الفأر الباب Y تفتح أمامه ويخرج .

هناك نوعان من الفئران A (فئران بدون ذاكرة) و B (فئران بذاكرة) .

(* بالنسبة للنوع A الإحتمال لكي يخرج الفأر في المحاولة k بعد فشله $(k-1)$ مرة هو $p_k = \frac{1}{2}$.

(* بالنسبة للنوع B الإحتمال لكي يخرج الفأر في المحاولة k بعد فشله $(k-1)$ مرة هو $q_k = \frac{k}{k+1}$.

ليكن الحدث A_n " فأر من النوع A يخرج في المحاولة n " .

ليكن الحدث B_n " فأر من النوع B يخرج في المحاولة n " .

(1) (1) بين أن $p(A_n) = \frac{1}{2^n}$ و $p(B_n) = \frac{n}{(n+1)!}$.

(2) نختار عشوائيا فأر من بين ساكنة تحتوي على 60% من النوع A و 40% من النوع B

(a) (1,5) احسب الإحتمال لكي يخرج هذا الفأر في المحاولة n .

(b) (1,5) إذا خرج الفأر في المحاولة n فما هو الإحتمال لكي يكون من النوع A ؟

(c) (1,5) حصلنا على 10 فئران من هذه الساكنة ماهو الإحتمال لكي يخرج 6 فقط منهم في المحاولة 4 .