ثا . سيدي الحسن اليوسي نيابة صفرو أكاديمية فـــــــاس	**فــــــرض مـــــــــحروس رقم 5**	الثانية علوم رياضية مدة الإنجاز: 2 ساعات التاريخ : 2004−2005 الأستاذ : ح. بوعيون

التمرين الأول (14 نقط)

الجـــــــزء الأول

1) نعتبر الدالة φ المعرفة على IR بما يلي : $\boxed{\varphi(x)=e^x(2-x)-2}$

a) أدرس تغيرات الدالة φ . | 0.5

b) بين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلين بالضبط في IR . نرمز بـــ a للحل الغير منعدم . | 0.5

c) تحقق أن : $1<a<2$. | 0.5

d) استنتج إشارة $\varphi(x)$. | 0.5

2) نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $\boxed{\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1} \quad ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}}$

a) بين أن الدالة f متصلة على IR ثم أدرس اشتقاق f قي 0 وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها | 1

b) بين أن الدالة f قابلة على الإشتقاق على IR^* وأن : $(\forall x\in IR^*): f'(x)=\dfrac{x\,\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$ | 0.5

c) بين أن : $f(a)=a(2-a)$ | 0.5

d) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ واستنتج الفروع الانهائية . | 1

e) أدرس تغيرات الدالة f وضع جدول تغيراتها . | 0.5

f) أنشئ منحنى الدالة f . (نأخذ $a\simeq 1,6$) | 0.5

الجـــــــزء الثاني

نعتبر الدالة F المعرفة على IR^+ بمايلي : $\boxed{F(x)=\int_0^x f(t)\,dt}$

1) بين أن الدالة F متصلة وتزايدية قطعا على IR^+ . | 0.5

2) لكل $x\in IR^+$ نضع $\boxed{G(x)=\int_{\ln 2}^x t^2e^{-t}\,dt}$

a) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $G(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$. | 1

b) بين أن : $(\forall t\in[\ln 2,+\infty[): f(t)\le 2t^2e^{-t}$ | 0.5

c) استنتج أن الدالة F مكبورة على IR^+ . | 0.5

d) نقبل أن الدالة F تقبل نهاية في $+\infty$ بين أن هذه النهاية منتهية . | 0.5

نضع في كل مايلي : $\boxed{L=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)}$

الجـــــزء الثاني

في كل مايلي n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

1) a) بين أن لكل $x>0$ لدينا : $\frac{1}{e^x-1}=e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots+e^{-nx}+\frac{e^{-nx}}{e^x-1}$ 0.5

b) بين أن لكل $x\geq 0$ $0\leq\int_0^x f(t)\,dt \leq \frac{a(2-a)}{n}$ 0.5

c) أحسب $I_n(x)=\int_0^x t^2 e^{-nt}\,dt$ لكل $x\geq 0$ 0.5

d) استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x)=\frac{2}{n^3}$. 0.5

2) a) بين أن لكل $x\geq 0$ $F(x)=\sum_{k=1}^{n} I_k(x)+\int_0^x f(t)\,e^{-nt}dt$ 0.5

b) نعتبر الدالة H_n المعرفة على IR^+ بـــ $\boxed{H_n(x)=\int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt}$ 0.5

بين أن الدالة H_n تقبل نهاية l_n عندما يؤول x إلى $+\infty$

وأن $L-l_n=2(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3})$.

c) باستعمال السؤال III) 1) b) بين أن المتتالية $(l_n)_{n\in IN^*}$ متقاربة وأن $\lim l_n=0$. 0.5

d) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة بـــ : $\boxed{u_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}}$ 0.5

بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها L' تحقق $L=2L'$.

التمرين الثانـــــي **(6 نقط)**

لتكن E مجموعة الدوال f القابلة للإشتقاق 3 مرات على IR والتي تحقق

$$\boxed{(x\in IR):f'''(x)=f(x)}$$

1) بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي . 1

2) نعتبر الدوال f_1 و f_2 و f_3 المعرفة على IR بما يلي :

$$\boxed{\begin{cases} f_1(x)=e^x \\ f_2(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{x\sqrt{3}}{2}) \\ f_3(x)=e^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{x\sqrt{3}}{2}) \end{cases}}$$

a) بين أن الدوال f_1 و f_2 و f_3 تنتمي إلى E . 1

b) أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)$. 1

c) بين أن الأسرة $B=(f_1,f_2,f_3)$ حرة في E . 1

3) لتكن $f \in E$. نضع $g = f'' + f' + f$	
a) بين أن g حل للمعادلة التفاضلية $\boxed{(1) \quad : \quad y' - y = 0}$.	0.5
b) استنتج تعبيرا للدالة g .	0.5
c) نعتبر المعادلة التفاضلية $\boxed{(2) \quad : \quad y'' + y' + y = \lambda e^{x}}$ حيث $\lambda \in IR$. بين أن الدالة $u(x) = \frac{\lambda}{3} e^{x}$ حل خاص للمعادلة (2) ثم استنتج الحل العام لهذه المعادلة .	1
d) استنتج تعبيرا للدالة f .	0.5
4) بين أن الأسرة $B = (f_1 , f_2 , f_3)$ أساس في E وحدد $\dim E$.	05