الثانية علوم رياضية مدة الإنجاز: 3 ساعات التاريخ : 2005−2004 الأستاذ : ح. بوعيون	**فـــــرض مـــــــحروس رقم 1**	**ثا . سيدي الحسن اليوسي** **نيابة صفرو** **أكاديمية فـــــــاس**

التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=]0,2[\cup]2,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=Arc\tan(\frac{2(1-x)}{2x-x^2})$$

الجـــــزء الأول

1 1) نضع $t=Arc\tan(1-x)$ لكل $x\in D$.

a) بين أن $f(x)=arc\tan(\tan(2t))$

1.5 b) استنتج أن :

$$\begin{cases} f(x)=2Arc\tan(1-x) & ; \quad 0<x<2 \\ f(x)=\pi+2Arc\tan(1-x) & ; \quad x>2 \end{cases}$$

1.5 2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]0,2[$

1 a) بين أن الدالة g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده .

b) حدد $g^{-1}(x)$ لكل $x\in J$.

الجـــــزء الثاني

0.5 لكل $\alpha\in\mathbb{Q}^{*+}$ نعتبر الدالة g_α المعرفة على $D_\alpha=\left]0,2^{\frac{1}{\alpha}}\right[\cup\left]2^{\frac{1}{\alpha}},+\infty\right[$ بما يلي :

0.5 $$g_\alpha(x)=-1+Arc\tan(\frac{2(1-x^\alpha)}{2x^\alpha-x^{2\alpha}})$$

1 1) بين أن $(\forall x\in D_\alpha):\ g_\alpha(x)=g(x^\alpha)-1$

0.5 2) a) بين أن $(\forall\alpha\in\mathbb{Q}^{*+})(\forall x,y\in IR^{*+}):\ x<y\Rightarrow x^\alpha<y^\alpha$

1 b) بين أن الدالة g_α تقابل من $]0,1[$ نحو مجال يجب تحديده .

0.5 c) بين أن المعادلة $g_\alpha(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_α في المجال $]0,1[$.

1 3) ليكن α و β من $\mathbb{Q}^{*+}$ بحيث $\alpha<\beta$.

a) بين أن $(\forall x\in]0,1[):\ x^\alpha>x^\beta$

b) استنتج أن $(\forall x\in]0,1[):\ g_\alpha(x)<g_\beta(x)$

c) قارن u_α و u_β .

التمرين الثاني

لكل $z \in \mathbb{C}-\{-i\}$ نضع $\varphi(z)=i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$

ونعتبر النقط $A(2i)$ و $B(i)$

الجـــــزء الأول

1 — 1) a) بين أن : $|\varphi(z)|=\frac{AM}{BM}$ $(\forall z \neq i)$

و $(\forall z \in \mathbb{C}-\{i,2i\})$: $\arg(\varphi(z)) \equiv (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

1.5 — b) حدد طبيعة المجموعتين $E=\{M(z)\ /\ |\varphi(z)|=1\}$

و $F=\{M(z)\ /\ \varphi(z)\in iIR^*\}$

1 — 2) a) بين أن : $|\varphi(z)-i|=\frac{1}{|z-i|}$

0.5 — و $\arg(\varphi(z)-i) \equiv -\arg(z-i)\ [2\pi]$

b) بين أنه إذا كانت النقطة $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B

1 — وشعاعها $\frac{1}{2}$ فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى دائرة يجب تحديدها .

c) أنشئ النقطة M' انطلاقا من النقطة M .

الجـــــزء الثاني

1) حل في $\mathbb{C}-\{i\}$ المعادلة $\varphi(z)=z$

1 — ليكن u و v حلي هذه المعادلة مع $Ré(u)=1$.

2) ليكن $z \in \mathbb{C}-\{i,u,v\}$ و $M(z)$ و $M'(\varphi(z))$ و $C(u)$ و $D(v)$

1 — a) بين أن $\frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v}=-\left(\frac{z-u}{z-v}\right)$

0.5 — b) استنتج أن : $(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C}) \equiv \pi+(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})\ [2\pi]$

1 — c) بين أنه إذا كانت M و C و D مستقيمية فإن النقط M' و M و C و D مستقيمية

وإذا كانت M و C و D غيرمستقيمية فإن النقط M' و M و C و D متداورة

الجـــــزء الثاني

1.5 — نضع $z=i+e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

حدد معيار وعمدة العدد $\varphi(z)$.