ثا . سيدي الحسن اليوسي نيابة صفرو أكاديمية فـــــــاس	فـــــرض مـــــــــحروس رقم 2	الثانية علوم رياضية مدة الإنجاز: 3 ساعات التاريخ : 2004−2005 الأستاذ : ح. بوعيون

التمرين الأول (4 نقط ونصف)

I) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E_1)\ :\ 31x-27y=5$

1 — 1) حل المعادلة (E_1) . (لاحظ أن الزوج $(35,40)$ حل لهذه المعادلة) .

0.5 — 2) نعتبر في المستوى المستقيم الذي معادلته $(\Delta)\ :\ 31x-27y=5$

ما هو عدد نقط المستقيم (Δ) التي إحداثياتها أعداد طبيعية وأفصولها أصغر أو يساوي 500 ؟

II) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E_2)\ :\ 31x^2-27y^2=5$

1) نفترض أن الزوج (x,y) حل للمعادلة (E_2) .

0.5 — a) بين أن : $x^2\equiv 2y^2\ [5]$

0.5 — b) بين أن لكل $a\in\mathbb{Z}$ $a^2\equiv 0\ [5]$ أو $a^2\equiv 1\ [5]$ أو $a^2\equiv 4\ [5]$

0.5 — c) استنتج أن $5/x$ و $5/y$

0.5 — 2) ليكن $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ بحيث $5/x$ و $5/y$

بين أن الزوج (x,y) لا يمكن أن يكون حلا للمعادلة (E_2)

0.5 — 3) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E_2)

0.5 — III) ليكن $k\in\mathbb{Z}$. بين أنه لا يمكن للعددين $x=27k+35$ و $y=31k+40$ أن يكونا مربعين كاملين في آن واحد .

التمرين الثاني (5 نقط ونصف)

نعتبر الدالة $f_n(x)=x^3+x^2-nx-1$ $\quad n\in IN^*-\{1\}$

0.5 — 1) a) أحسب $f_n'(x)$ وحل المعادلة $f_n'(x)=0$

ليكن α_n و β_n حلي هذه المعادلة مع $\alpha_n>0$,

0.25 — b) بين أن $\alpha_n^2=\dfrac{n-2\alpha_n}{3}$

واستنتج العددين الجذريين u_n و v_n بحيث $f_n(\alpha_n)=u_n+v_n\alpha_n$

0.5 — c) ضع جدول تغيرات الدالة f_n على IR^+ .

0.5 — 2) a) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n في IR^+ .

0.5 — b) بين أن $(\forall n\geq 2)\ :\ \alpha_n<x_n<\sqrt{n}$

0.5 — c) استنتج أن $\lim x_n=+\infty$.

0.75 — d) أدرس رتابة المتتالية $(x_n)_{n\geq 2}$.

0.5 — 3) a) بين أن $(\forall n\geq 2)\ :\ n=x_n^2+x_n-\dfrac{1}{x_n}$

0.5 — b) استنتج أن $\lim \dfrac{\sqrt{n}}{x_n}=1$

4) نضع $y_n = x_n - \sqrt{n}$

0.5 a) بين أن $y_n = \dfrac{1 - x_n^2}{x_n^2 + x_n\sqrt{n}}$: $(\forall n \geq 2)$ (استعمل تعريف x_n)

0.5 b) استنتج $\lim y_n$. (استعمل السؤال 2) c))

التمرين الثالث (3 نقط ونصف)

ليكن $n \in \mathbb{Z} - \{-2001, 2\}$. نضع $f(n) = \dfrac{n + 2001}{n - 2}$

0.5 1) a) بين أن $(n + 2001) \wedge (n - 2) = (n - 2) \wedge 2003$

0.5 b) حدد قيم n التي يكون من أجلها $(n + 2001) \wedge (n - 2) = 2003$

0.5 c) حدد حسب قيم n $(n + 2001) \wedge (n - 2)$

0.5 2) حدد قيم n بحيث يكون $f(n) \in \mathbb{Z}$.

3) ليكن p و q من IN^* بحيث $p \neq q$ و $p \wedge q = 1$.

0.5 a) بين أن $q^2 \wedge (p^2 - q^2) = 1$.

0.5 b) بين أن $f(n) = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow n = 2 + \dfrac{2003q^2}{p^2 - q^2}$

0.5 c) حدد p و q و n بحيث $f(n) = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ و $p \wedge q = 1$

التمرين الرابع (6 نقط ونصف)

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$

و نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ $u_{n+1} = f(u_n)$

0.5 I) 1) أدرس تغيرات الدالة f .

0.5 2) بين أن $0 < u_n \leq 1$: $(\forall n \in IN)$

0.5 3) بين أن $f(x) \leq x$: $(\forall x \in [0,1])$ و استنتج رتابة المتتالية (u_n) .

0.75 4) a) بين أن $u_n < \dfrac{1}{n+1}$: $(\forall n \in IN)$

0.5 b) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وأحسب $\lim u_n$.

II) لكل $n \in IN^*$ نضع $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

0.25 1) ليكن $\varepsilon > 0$. a) بين $(\exists n_0 \in IN) : k > n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

0.5 b) بين أن $(\forall n > n_0) : \dfrac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

0.25 c) بين أن $(\exists n_1 \in IN) : n > n_1 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} \dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

0.5 d) نضع $N = \sup(n_0, n_1)$ بين $n > N \Rightarrow \dfrac{H_n}{n} < \varepsilon$

0.5 2) استنتج أن $\lim \dfrac{H_n}{n} = 0$

0.5	3) a) بين أن $\frac{1}{u_n}+1+u_n=\frac{1}{u_{n+1}}$: $(\forall n \in IN)$
0.5	b) بين بالترجع أن $H_n+1+n \leq \frac{1}{u_n}$: $(\forall n \geq 1)$ (استعمل I) 4) a))
075	c) استنتج $\lim \frac{1}{nu_n}$.

http://membres.lycos.fr/hamidbouayoun