

التمرين الأول

8,5

الجزء الأول

(1) نعتبر الدالة u المعرفة على IR^+ بما يلي : $u(x) = e^x - x - 1$

(a) بين أن الدالة u تزايدية على IR^+ .

(b) بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة $g(t) = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1$ في المجال $[0, x]$

بين أن $(\forall x > 0) : 0 \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2} - \frac{1}{2} \leq \frac{u(x)}{x}$

(c) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

(d) استنتج $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ (يمكن وضع $t = \ln(1-x)$)

(2) نعتبر الدالة v المعرفة على $]-\infty, 0[$ بما يلي : $v(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \ln(1-x)$

ادرس تغيرات v واستنتج أن $(\forall x \in]-\infty, 0[) : \ln(1-x) < \frac{-x}{\sqrt{1-x}}$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x + x - 1} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} & ; x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(1) بين أن الدالة f متصلة في 0

(2) (a) أدرس اشتقاق f على يمين 0 وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

(b) أدرس اشتقاق f على يسار 0 وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

(4) (a) بين أن $(\forall x > 0) : 1 - x - e^{-x} < 0$

(b) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ واستنتج تغيرات f على $]0, +\infty[$.

(5) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty, 0[$ واستنتج تغيرات f على $]-\infty, 0[$.

(6) ضع جدول تغيرات f وأنشئ المنحنى (C_f) .

التمرين الثاني

شركة تتوفر على 30% من الأطر و 70% من الموظفين . قمنا باستطلاع أسفر عن النتائج التالية

الاحتمال لكي يكون إطار يتكلم الإنجليزية هو $\frac{3}{4}$

الاحتمال لكي يكون موظف يتكلم الإنجليزية هو $\frac{1}{3}$

- (1) سألنا شخصا من هذه الشركة ، وجدناه يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال لكي يكون إطارا ؟
 (2) سألنا 10 أشخاص ما هو الاحتمال لكي يكون من بينهم 4 أشخاص بالضبط يتكلمون الإنجليزية

1.5

1.5

التمرين الثالث

5,5

نضع $E = IR^{*+} \times IR$. ونعتبر القانون * المعرف على E بما يلي

$$(x, y) * (x', y') = (xx', \sqrt[n]{xy'} + yx')$$

- (I) 1) بين أن القانون * تجميعي في E .
 2) بين أن $(1, 0)$ هو العنصر المحايد في $(E, *)$.
 3) بين أن $(E, *)$ زمرة غير تبادلية .

0.5

0.5

1

$$(II) \text{ لكل } (a, b) \in E \text{ نضع } M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \sqrt[n]{a} & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$F = \{ M_{(a,b)} / (a,b) \in E \} \text{ و}$$

$$(1) \text{ بين أن } \forall (a,b), (a',b') \in E : M_{(a,b)} \cdot M_{(a',b')} = M_{(a,b)*(a',b')}$$

1

0.5

$$(b) \text{ استنتج أن } (F, \times) \text{ جزء مستقر من } (M_2(IR), \times)$$

$$\varphi : (E, *) \rightarrow (F, \times)$$

$$(2) \text{ نعتبر التطبيق } (a,b) \rightarrow M_{(a,b)}$$

$$(a) \text{ بين أن } \varphi \text{ تشاكل تقابلي من } (E, *) \text{ نحو } (F, \times) .$$

1

$$(b) \text{ استنتج بنية } (F, \times) \text{ وأعط مقلوب كل } M_{(a,b)} \text{ من } F .$$

1

