أكاديمية فـــــاس نيابة صفرو ثا . سيدي الحسن اليوسي	فـــرض مــــــحروس رقم 5 1/2	الثانية علوم رياضية مدة الإنجاز : ساعتان ونصف التاريخ : 23 مـــاي 2005 الأستاذ : ح. بوعيون

التمرين الأول **(11 نقطة)**

لكل $n \in IN^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n e^{-nx}$

C_n منحنى الدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$.

الجــــــزء الأول

1 1) a) ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

0.5 b) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين C_n و C_{n+1}

2) لتكن u_n القيمة القصوية للدالة f_n على $[0,+\infty[$.

0.5 a) بين أن $(\forall n \in IN^*) \; : \; u_n = f(\frac{1}{n})$

0.5 b) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

0.5 c) بين أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

1 3) a) أحسب المساحة S_n للحيز المحصور بالمنحنى C_1 ، محور الأفاصيل والمستقيمين $x = 0$ و $x = n$.

0.5 b) أحسب $\lim S_n$.

الجــــــزء الثاني

لكل $n \in IN^*$ ولكل $x \geq 0$ نضع $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

1 1) بين أن : $(\forall t \geq 0) : \; 0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$

1 2) بين أن : $(\forall t \geq 0)\,(\forall n \in IN^*) \; : \; 0 \leq f_n(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$

(يمكن استعمال الترجع)

1 3) استنتج أن $(\forall x \geq 0)\,(\forall n \in IN^*) \; : \; 0 \leq F_n(x) \leq 2$.

الجــــــزء الثالث

لكل $n \in IN^*$ ولكل $x \geq 0$ نضع $G_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\, dt$.

0.5 1) a) بين أن : $(\forall x \geq 0) \; (\forall n \geq 2) \; : \; G_n(x) = -x^n e^{-x} + nG_{n-1}(x)$.

0.5 b)استنتج أن : $G_n(x) = -n!\sum_{p=2}^{n} \frac{x^p e^{-x}}{p!} + n!G_1(x)$.

1 2) بين أن : $\lim_{x \to +\infty} G_n(x) = n!$.

3) a) بين أن $(\forall x \geq 0)\ (\forall n \in IN^*)\ :\ G_n'(nx) = n^n f_n(x)$ 0.5

b) بين أن : $(\forall x \geq 0)\ (\forall n \in IN^*)\ :\ F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} G_n(nx)$ 0.5

c) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$. 0.5

التمرين الثاني (9 نقط)

لتكن E مجمعة الدوال f من IR نحو IR المعرفة بما يلي :
$f(x) = (ax+b)e^{2x} + (cx+d)e^{-2x}$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقي

الجـــــــزء الأول

1) بين أن : $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي . 1

2) نضع $f(x) = (ax+b)e^{2x} + (cx+d)e^{-2x}$

a) بين أنه إذا كان $a \neq 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax+b)e^{2x} = \pm\infty$. 0.5

b) بين أنه إذا كان $c \neq 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} (cx+d)e^{-2x} = \pm\infty$. 0.5

c) بين أنه إذا كان $f(x) = 0$ لكل x من IR فإن $a = b = c = d = 0$ 1

3) نعتبر الدوال $f_1(x) = xe^{2x}$ ، $f_2(x) = e^{2x}$ ، $f_3(x) = xe^{-2x}$ ، $f_4(x) = e^{-2x}$ 1

بين أن الأسرة $B = (f_1, f_2, f_3, f_3)$ أساس في الفضاء E .

الجـــــــزء الثاني

لتكن P مجموعة الدوال الزوجية من E و I مجموعة الدوال الفردية من E .

يعني $\mathrm{P} = \{f \in E\ /\ (\forall x \in IR) : f(-x) = f(x)\}$

$\mathrm{I} = \{f \in E\ /\ (\forall x \in IR) : f(-x) = -f(x)\}$

1) بين أن كل من $(\mathrm{P},+,.)$ و $(\mathrm{I},+,.)$ فضاء متجهي حقيقي . 1

2) نعتبر الدالتين $h_1(x) = xe^{2x} - xe^{-2x}$ و $h_2(x) = e^{2x} + e^{-2x}$

a) بين أن الأسرة $B_1 = (h_1, h_2)$ أسرة حرة في P . 0.5

b) لتكن f من P . بين أنه يوجد $(\alpha, \beta) \in IR^2$ بحيث $f = \alpha h_1 + \beta h_2$ 1

c) استنتج أن $B_1 = (h_1, h_2)$ أساس في P واستنتج $\dim \mathrm{P}$. 0.5

3) نعتبر الدالتين $h_3(x) = xe^{2x} + xe^{-2x}$ و $h_4(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ 1

بين أن $B_2 = (h_3, h_4)$ أساس في I واستنتج $\dim \mathrm{I}$.

4) a) بين أن $\mathrm{P} \cap \mathrm{I} = \{\theta\}$ 0.5

b) بين أن كل دالة f من E تكتب بطريقة وحيدة على شكل $f = f_I + f_p$ 0.5

حيث $f_I \in \mathrm{I}$ و $f_P \in \mathrm{P}$.