ثا . سيدي الحسن اليوسي نيابة صفرو أكاديمية فـــــــاس	**فـــــرض مــــــــحروس رقم 1**	الثانية علوم رياضية مدة الإنجاز : 3 ساعات التاريخ : 24 نونبر 2005 الأستاذ : ح. بوعيون

التمرين الأول

لتكن f دالة متصلة على IR . ونفترض أنه توجد 4 أعداد a و b و c و d من IR بحيث
$a<b$ و $f(a)<f(b)$ و $c<d$ و $f(c)>f(d)$

نعتبر الدالة φ المعرفة بما يلي : $\varphi(t)=f\left((1-t)a+tc\right)-f\left((1-t)b+td\right)$

1) بين أن : $(\exists\varepsilon\in\left]0,1\right[)\ :\ \varphi(\varepsilon)=0$. — 0,75

2) استنتج أن f غير تباينية . — 0,5

3) استنتج من كل ما سبق انه إذا كانت f دالة متصلة على IR و تباينية فإن f رتيبة قطعا . — 0,5

التمرين الثاني

نعتبر الدالة $\boxed{f_n(x)=2\,Arc\tan\left(\dfrac{x^n}{1+\sqrt{1+x^{2n}}}\right)}$ حيث n عدد صحيح طبيعي فردي

الجـــــــــزء الأول

1) a) بين أن : $(\forall x\in IR)(\exists!\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[)\ :\ \tan(\alpha)=x^n$ — 0,5

b) بين أن : $(\forall x\in IR)\ :\ f_n(x)=Arc\tan(x^n)$ — 0,75

2) بين أن f_n تزايدية قطعا على IR . — 0,5

3) لكل $x\in IR$ نضع $g_n(x)=f_n(x)+x-1$

a) بين أن g_n تقابل من $\left]0,1\right[$ نحو مجال يجب تحديده . — 0,75

b) بين أن المعادلة $f_n(x)=1-x$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $\left]0,1\right[$. — 0,5

c) بين أن $g_{n+1}(x)<g_n(x)$ لكل $x\in\left]0,1\right[$ ثم قارن a_n و a_{n+1} . — 1

الجـــــــــزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي :

$\boxed{f(x)=x+f_1(x)}$ يعني $\boxed{f(x)=x+Arc\tan(x)}$

1) a) بين أن الدالة f تقابل من IR نحو IR . — 0,75

b) بين أن الدالة f^{-1} دالة فردية . — 0,75

c) بين أن $f(a_1)=1$. — 0,5

2) بين أن : $(\forall x\in IR)(\exists!u_x\in IR)\ :\ u_x+Arc\tan(u_x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ — 0,75

3) نعتبر الدالة

$$\begin{array}{l} g:IR\to IR \\ x\to g(x)=u_x \end{array}$$

a) بين أن الدالة g فردية . — 05

b) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=a_1$ — 0,75

c) أدرس رتابة الدالة g على IR . 0,75

d) بين أن الدالة g متصلة على IR . 0,5

e) بين أن الدالة g تقابل من IR نحو مجال يجب تحديده 0,75

التمرين الثالث

لكل $z \in \mathbb{C}^*$ نضع $\boxed{\varphi(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}}$ ونعتبر التطبيق $\boxed{\begin{array}{l} f \;:\; P - \{o\} \to P - \{o\} \\ \quad M(z) \to M'(\varphi(z)) \end{array}}$

الجــــــــزء الأول

نعتبر المعادلة $(E) \;:\; \varphi(z) + i\,\bar{z} + (1+2i) = 0$

1) a) بين أن : $(E) \Leftrightarrow z^2 + (2+i)z + i = 0$. 0,25

b) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) (مع $Ré(z_1) > Ré(z_2)$) 0,75

2) a) بين أن : $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ 0,5

b) استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين z_1 و z_2 . 0,75

3) نعتبر المعادلة $(E_n) : z^{n-1}\varphi(z) = 1$ مع $n \in IN$ و $n \geq 3$.

a) حل في $\mathbb{C}$ العادلة (E_n) . 0,75

b) بين أن مجموع حلول المعادلة (E_n) منعدم و صورها تكون مضلعا منتظما محاطا بدائرة يجب تحديدها . 0,5

4) نضع $z = e^{i\alpha} + i$ حيث $\alpha \in IR - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$.حدد الشكل المثلثي للعدد $u = z\,\varphi(z)$ 0,75

الجــــــــزء الثاني

1) حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق f 0,5

2) a) بين أن : $\arg(\varphi(z)) \equiv \arg(z) \;\; [2\pi] \quad (\forall z \neq 0)$ 0,5

b) استنتج لكل $M \neq O$ و O و M و M' مستقيمية و $O \notin [MM']$. 0,5

3) نعتبر نقطتين $A(a)$ و $B(b)$ مختلفتين وتخالفان O ونضع $A' = f(A)$ و $B' = f(B)$

و نفترض أن O و A و B مستقيمية .

a) بين أن : $\frac{b}{a} \in IR^*$. 0,5

b) بيت أن : $\arg\left(\dfrac{\frac{1}{\bar{b}} - z'}{\frac{1}{\bar{a}} - z'}\right) \equiv \arg\left(\frac{b}{a}\right) - \arg\left(\dfrac{b-z}{a-z}\right) \;\; [2\pi] \quad : \quad (\forall z \neq 0)$ 0,75

c) بين أن : $(\overrightarrow{M'A'}, \overrightarrow{M'B'}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \;\; [\pi] \quad : \quad (\forall M \neq O)$ 0,5

d) استنتج صورة الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ بالتطبيق f . 0,75