$2^{ème}$ SM	**Limites et continuité**	*H . Bouayoun*

Exercice1

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=x\sin(\frac{1}{x}) & ; x>0 \\ f(0)=1 \\ f(x)=xE(\frac{1}{x}) & ; x<0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de la fonction f en 0 . 2) calculer $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$.

Exercice 2

Etudier la continuité de la fonction f sur IR dans les cas suivants :

1) f(x)=E(x)(x-E(x)) 2) f(x)=$\left|x-2E(\frac{x+1}{2})\right|$

3) $f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\in\mathbb{Z} \\ x & si\ x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\in\mathbb{Q} \\ x & si\ x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $2f(a)+3f(b)=5f(c)$.

Exercice 4

Soient f et g et h trois fonctions continues sur un intervalle I telles que $(\forall x\in I): g(x)\le f(x)\le h(x)$

Montrer que si chacune des deux fonctions g et h admet un point fixe dans I alors f en admet un aussi .

Exercice 5

Soit f , $IR\to IR$ continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Montrer que f s'annule . Appliquer ceci aux polynôme de degré impair .

Exercice 6

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)=0$, $(\forall x\in[0,1]: f(x)\ge 0$

Montrer que $(\forall\lambda\in]0,1[)(\exists x_\lambda\in[0,1]): f(x_\lambda+\lambda)=f(x_\lambda)$

Exercice 7

Soient $f,g:[a,b]\to IR$ continues . on suppose que $(\forall x\in[a,b]): f(x)>g(x)>0$

Montrer qu'il existe $k>1$ tel que $f>kg$

Exercice 8

Soient $f,g:[a,b]\to IR$ continues . on suppose que

$(\forall x\in[a,b])\ (\exists y\in[a,b])\quad tq\quad f(x)=g(y)$

Montrer qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=g(x)$.

Exercice 9

Montrer que toute fonction polynôme de IR dans IR de degré impaire , s'annule en au moins un point .

Exercice 10

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et $[m,M]$ un segment contenant f(a) et f(b) .

Montrer que la courbe représentative de f coupe les diagonales du rectangle $[a,b]\times[m,M]$.

Exercice 11

1) Montrer que : $(\forall n \in IN^*)(\exists! a_n \in]0,1[) : 2na_n \tan(\frac{\pi}{2}a_n) = \pi$

2) comparer a_n **et** a_{n+1}

3) Montrer que a_n est solution de l'équation $2\arctan(\frac{\pi}{2nx}) - \pi x = 0$

Exercice 12

On considère la fonction $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$. Montrer que f est une bijection de $[-1,1]$ vers un intervalle à déterminer puis déterminer $f^{-1}(x)$

Exercice 13

Soit f une fonction définie de IR dans IR tq :

f continue en 0 et $(\forall (x,y) \in IR^2) : f(x+y) = f(x) + f(y)$

1) Montrer que $f(0) = 0$.

2) Montrer que : $(\forall (x,y) \in IR^2) : f(x) = f(x-y) + f(y)$.

3) En déduire que f est continue sur IR .

Exercice 14

Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$. On suppose que f est croissante sur $]0,+\infty[$ et la fonction g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

1) Soit $x_0 \in]0,+\infty[$. Montrer que $(\forall x > x_0) : 0 \le f(x) - f(x_0) \le (x - x_0)g(x_0)$

et $(\forall x < x_0) : (x - x_0)g(x_0) \le f(x) - f(x_0) \le 0$

2) Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 15

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ tq : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty \end{cases}$

1) Montrer que : $\exists (\alpha,\beta) \in]a,b[^2 / f(\alpha).f(\beta) < 0$

2) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a,b[$.

3) Soit g une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que : $\exists c \in]a,b[/ f(c) = g(c)$

4) Montrer que : $\exists c \in]a,b[/ \sqrt{\frac{b-c}{c-a}} - \sqrt{\frac{c-a}{b-c}} = \sqrt{(b-c)(c-a)}$

Exercice 16

On considère la fonction $f(x) = (\sqrt[3]{1-x} - 1)^3 + 1$.

Montrer que f est une bijection de $]-\infty,1]$ vers un intervalle à déterminer puis déterminer $f^{-1}(x)$

Exercice 17

On considère la fonction $f(x) = (\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin x} - 1)^3$.

1) déterminer le domaine de définition de f .

2) Montrer que f est une bijection de $[-1,1]$ vers un intervalle à déterminer puis déterminer $f^{-1}(x)$

Exercice 18

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

1) déterminer le domaine de définition de f . est ce que f réalise une bijection de D_f vers IR ?

2) soit g la restriction de f à $I=\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer .

b) déterminer $g^{-1}(x)$.

c) En déduire que : $(\forall x\in J): Arc\sin(\dfrac{2x}{1+x^2})=Arc\cos(\dfrac{x^2-1}{x^2+1})$

Exercice 19

Pour tout entier n non nul on considère la fonction f_n définie sur IR^+ par $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k.x^k$

1) Montrer que pour tout $n\geq 1$ l'équation $f_n(x)=1$ admet un unique solution positive que l'on notera u_n

2) comparer u_n **et** u_{n+1}

Exercice 20

On considère la fonction f définie par : $f(x)=arc\sin(\dfrac{2x}{1+x^2})$

1) Déterminer D_f .

2) Montrer que : $f(x)=\begin{cases}-\pi-2Arc\tan x & ; \quad x\leq -1\\ 2Arc\tan x & ; \quad -1\leq x\leq 1\\ \pi-2Arc\tan x & ; \quad x\geq 1\end{cases}$

3) soit g la restriction de f à $I=[1,+\infty[$.

Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer puis déterminer $g^{-1}(x)$.

Exercice 21

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases}f(x)=\arcsin(2x-1)+\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \; ; \; x\in\left]0,1\right]\\ f(0)=0\end{cases}$

1) a) Montrer que : $(\forall x\in\left]0,1\right])(\exists!\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[):x=\cos^2\alpha$

b) en déduire que $(\forall x\in[0,1]) : f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos\sqrt{x}$

2) que f est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle J à déterminer puis déterminer $f^{-1}(x)$.

Exercice 22

On considère la fonction f définie par : $f(x)=Arc\tan(\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}})$

1) Déterminer D_f .

2) Montrer que : $\begin{cases}f(x)=Ar\sin x+\dfrac{3\pi}{4} \quad si \quad -1\leq x\leq\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\ f(x)=Ar\sin x-\dfrac{\pi}{4} \quad si \quad \dfrac{-\sqrt{2}}{2}<x\leq 1\end{cases}$

Exercice 23

On considère dans IR l'équation suivante $(E): \arctan(x+1)+\arctan(x-1)=\frac{\pi}{4}$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique dans IR et qu'elle appartient $]0,1[$.

2) Résoudre l'équation (E)

3) en déduire $\tan(\frac{\pi}{12})$.

Eercice 24

On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x)=\sqrt[n]{\arctan(x)}-\arccos(\sqrt[n]{x})$ où $(n \in IN^*)$

1) Montrer que f_n est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle J à déterminer .

2) a) montrer que Pour tout $n \in IN^*$, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle $]0,1[$.

b) montrer que $(\forall n \in IN^*)(\forall x \in]0,1[): \sqrt[n]{x} < \sqrt[n+1]{x}$

c) En déduire que : $(\forall n \in IN^*)(\forall x \in]0,1[): f_n(x) < f_{n+1}(x)$

d) comparer a_n et a_{n+1}

Exercice 25

Soient a et b deux nombres réels tels que : $a.b<1$

On pose $\alpha = Arc\tan(a)$ et $\beta = Arc\tan(b)$

1) montrer que $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\ (1-ab)$

2) en déduire que $-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

3) Montrer que : $Arc\tan(a)+Arc\tan(b)=Arc\tan(\frac{a+b}{1-ab})$

4) calculer $2\arctan(\frac{1}{4})+\arctan(\frac{1}{7})+2\arctan(\frac{1}{13})$